

English Summary :

Networks

topology given by adjacency matrix $a_{ij} = 1$ if link $i \leftrightarrow j$ exists

node degree $k_i = \sum_j a_{ij}$

$i, j = 1, \dots, N$ nodes

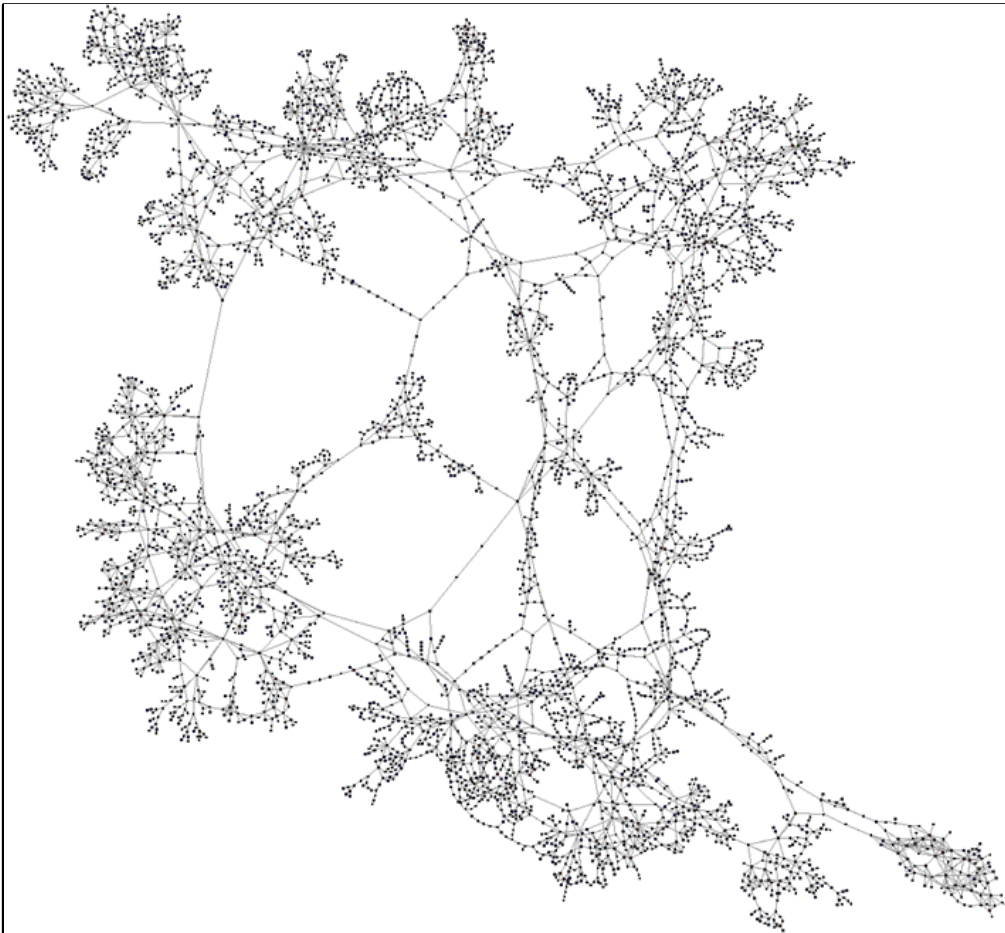
degree distribution $P(k)$

mean degree $\langle k \rangle = \sum_k P(k)k$

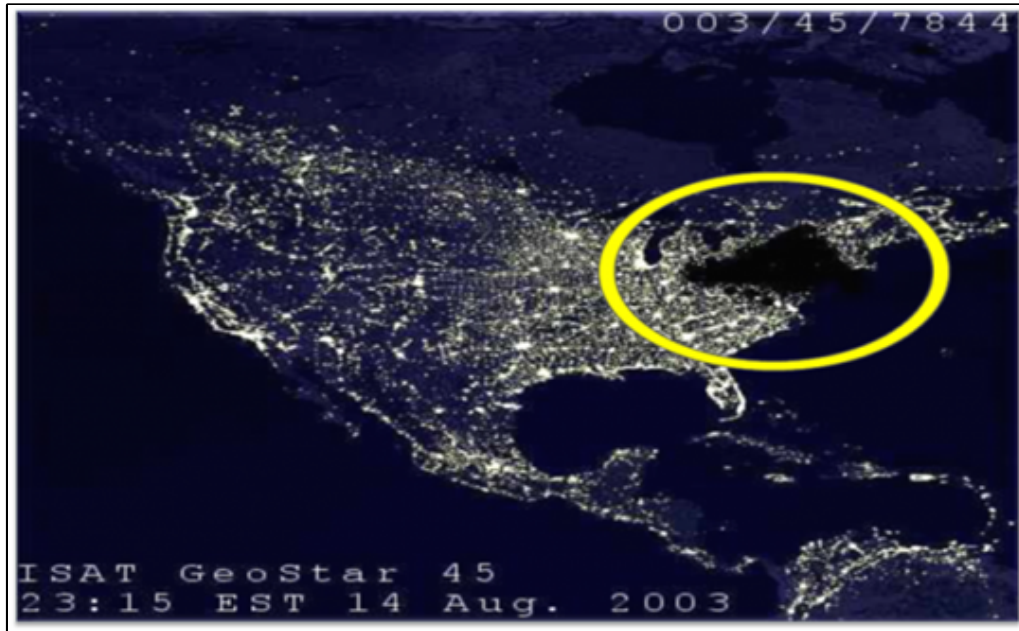
mean path length ℓ

cluster coefficient C_i

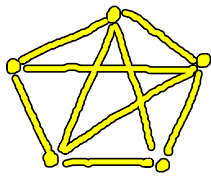
- regular ring (nonlocal coupling of range $r = \frac{\ell}{N}$)
- global coupling (all-to-all)
- random network (Erdős-Rényi)
- small-world (large C_i , small ℓ)
- scale-free ($P(k) \sim k^{-\alpha}$)



US power grid
(Stromnetz)

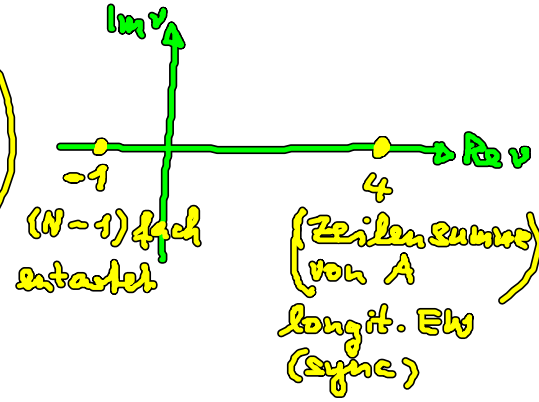


power
blackout
in den USA
2003



vollständ. Graph
(all-to-all)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



4.2.2 Kopplungsschemata

dynam. Var. auf jedem Knoten $x_i \in \mathbb{R}^m$

- Kopplungsschema \underline{H}_{ij} ($m \times m$ Matrix) gibt an, wie die Variablen der Knoten i und j koppeln
 \Rightarrow dynam. Gle.

Beispiel: gekoppelte Laser: dyn. Var. $\underline{x} = \begin{pmatrix} E \\ n \end{pmatrix}$ el. Feld Ladungsträgerdichte

$m=2$, z.B. $H_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Feld koppelt an Feldvariable

- opt. Kopplung: Feldvar. i an Feldvar. j (Spiegel)
- elektroopt. Koppl.: Feldvar. i an Ladungsträgervar. j
- Selbstkopplung (Lang-Kobayashi-Modell):
 Feld i koppelt an Feld i (Spiegel)

2 Hopf-Normalform (§4.1): $\underline{x} = \begin{pmatrix} \text{Re } z \\ \text{Im } z \end{pmatrix}$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S' -Symm. brechende Kopplung nur über $\text{Re } z$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Differenzialgl. System aller Elemente

$x_i \in \mathbb{R}^m$, $i=1, \dots, N$ (in Dim. des Phasenraumes eines Elements)

$$\dot{x}_i = \underline{F}_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \underline{H}_{ij} x_j$$

lokale Dyn., z.B. Hopf-Normalform \uparrow Kopplungsstärke
 \uparrow Topologie $(N \times N)$
 \uparrow Kopplungsmatrix $(m \times m)$

zeitverzögert gekoppelte Netzwerke:

• direkte Kopplung

$$\dot{x}_i = \underline{F}_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \underline{H}_{ij} x_j(t - \tau_{ij})$$

Beispiel: Laser mit Feedback

$(N=1, a_{ij}=1)$

$\tau_{11} = \tau_{ex}$ (round-trip-Zeit zum Spiegel)

• diffusive Kopplung

$$\dot{x}_i = \underline{F}_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \underline{H}_{ij} [x_j(t - \tau_{ij}) - x_i(t)]$$

Beispiel: Neuronenkopplung

Input ist Potenzialdifferenz

Beu.: beides in einander umformen durch

$$\underline{F}_i = \underline{F}_i - \sigma \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \underline{H}_{ij} \right) x_i$$

(geänderte lokale Dynamik)

4.3 Synchronisation von Netzwerken

Synchronisation und Desynchronisation:

erwünschte Effekte:

z.B. Synchronisation von Lasern
(verschlüsselte Kommunikation durch chaot. Synchron.)



Synchronisation der Neuronen im Gehirn
(Lernvorgänge, Gedächtnis, Wahrnehmung)

unerwünschte Effekte:

z.B. patholog. Zustände im Gehirn (Synchron. Feuern)
(Parkinson, Tremor, Epilepsie)

Schwingungen der London Millennium Bridge (2000)
durch spontane Synchron. der Fußgänger

Lit.: Pikovsky, Rosenblum, Kurths: Synchronisation
(Cambridge University Press 2001)

4.3.1 Voraussetzung für Synchronisation aller Elemente

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} H_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \quad \begin{array}{l} x_i \in \mathbb{R}^n \\ i=1, \dots, N \end{array}$$

• $F_i = F$ alle Elemente gleiche lokale Dynamik

• $\tau_{ij} = \tau$ " gleiche Signallaufzeiten

• $\sum_{j=1}^N G_{ij} = \text{const. } \forall i$ alle Elemente bekommen in Fall der Synchron. das gleiche Eingangssignal

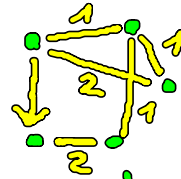
$$\text{oder } \sum_{j=1}^N G_{ij} = 1$$

$$\text{oder } \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \rightarrow \sum_j \tilde{G}_{ij} \Rightarrow \sum_{j=1}^N \tilde{G}_{ij} = \sigma \left(\frac{\text{konstante}}{\text{Zeilensumme}} \right)$$

= lang. Eigenwert
von \tilde{Q}

zur synchronen
Mannigfaltigkeit

konstante Zeilenschwung erreicht nur durch Wahlung
der Links



• $\underline{H}_{ij} = \underline{H}$ identische Kopplungsmatrix $\underline{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

⇒ Dynamik auf der isochronen Synchronisations-
mannigfaltigkeit gegeben durch

$$\dot{\underline{x}}_s = \underline{F}(\underline{x}_s) + \sigma \underline{H} \underline{x}_s(t-\tau) \quad \underline{x}_s = x_i(t) \quad \forall i$$

↑
lang. EW von \tilde{Q}

entspricht der Dynamik eines einzelnen Elements
mit zeitverzögerter Rückkopplung

(vgl. §4.1 gleichphasige Lösung)

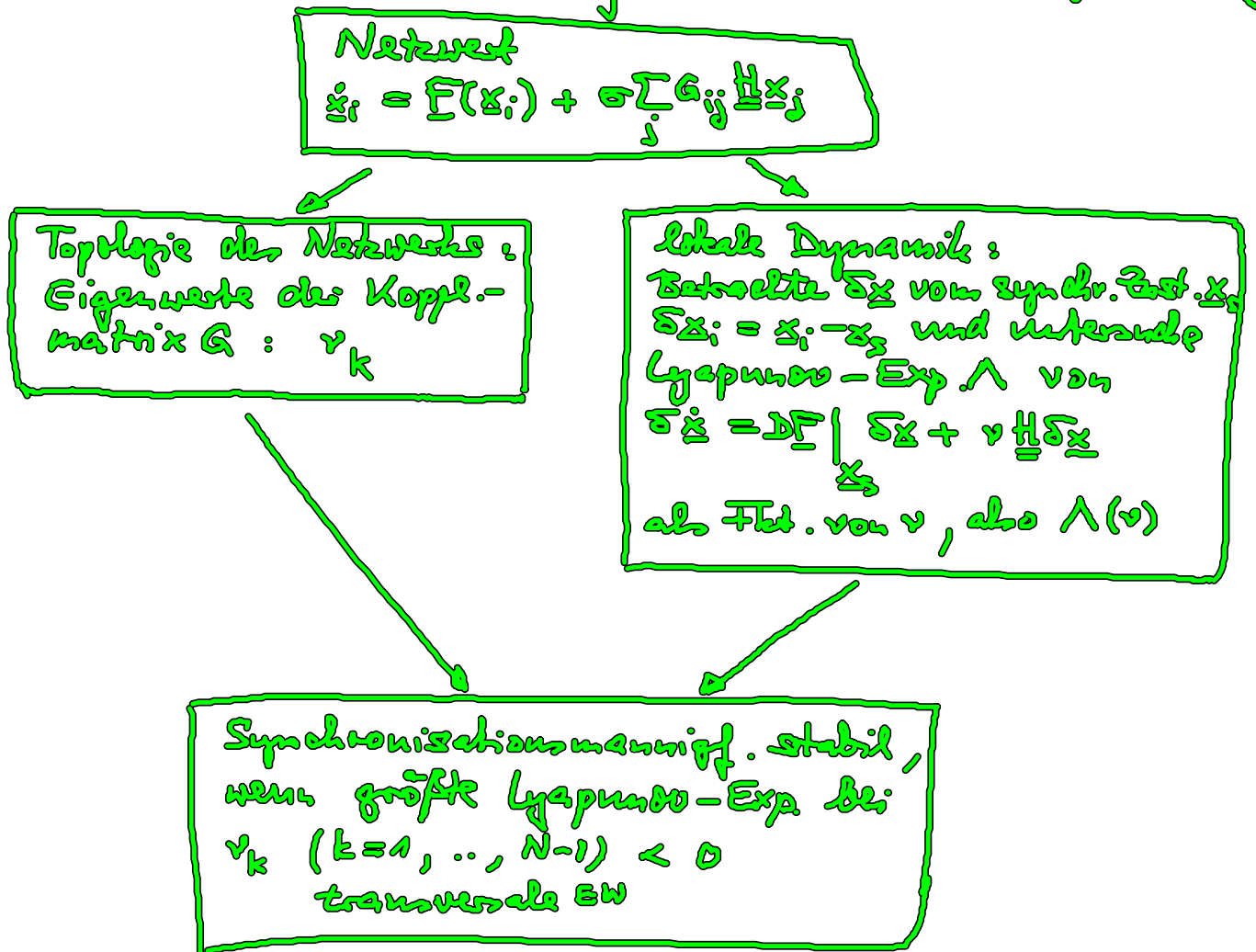
v_1, \dots, v_{N-1} transverse EW von \tilde{Q}
→ wichtig für Untersuchung der
Stabilität der synchronen Lösung

Frage: Ist die Dynamik in Synchron.mannigfalt.stabil?

4.3.2 Master Stability Function (MSF)

L.M. Pecora, T.L. Carroll, PRL 80, 2109 (1998)
(Netzwerke ohne Zeitverzögerung)

Schema zur Bestimmung der Stabilität der synchr. Lösung:



MSF = größter Lyapunov-Exp $\Lambda(\nu)$ $\nu \in \mathbb{R}$
 Synchr. Lös. stabil $\Leftrightarrow \Lambda(\nu_k) < 0$ ($k=1, \dots, N-1$)

\uparrow \uparrow
 aus aus
 Dyn. Topol

Vorteile: Wenn $\Lambda(\nu)$ einmal berechnet ist,
kann Stab. für beliebige Topologien
betrachtet werden
(Separ. von Topologie u. lokaler Dynamik)

NB: - unabh. für diskrete Abb. (statt Dgl.)
 - sowohl period. als auch chaot. synchr. Lösungen
 untersuchbar