




English Summary :

Networks of Hopf normal forms

$$\dot{z}_j = (\lambda + i - (1 + i\gamma) |z_j|^2) z_j + \sigma \sum_{n=1}^N G_{jn} (z_n(t-\tau) - z_j(t))$$

$$\begin{aligned} r_j &= r_{\sigma, m} \\ \varphi_j &= \Omega_m t + j \frac{2\pi m}{N} \end{aligned}$$

$m=0$ sync in-phase  $z_j(t) = r \cdot e^{i\varphi_j} \in \mathbb{C}$
 $m=1$ splay state  $\sigma = \kappa e^{i\beta} \in \mathbb{C}$
 $m>1$ cluster sync 

$|R|=1$ sync Kuramoto order par.
 $R = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\varphi_j}$

$|R| \neq 0$

For appropriate β stabilize desired sync state $m \in \mathbb{N}_0$.

4.5 Synchronisation in neuronal Netzwerken

Lit.: Lehnert et al, Europhys Lett. 96, 60013 (2011)
Keane et al, Eur. Phys. J. B 85, 407 (2012)

Ziel: Vergleich von Desynchronisationsübergängen in Netzwerken aus Typ-I u. Typ-II ausgehenden Knoten

Motivation: Synchronisation im Gehirn:

- konstruktiv in vielen kognitiven Prozessen
- pathologisch in Epilepsie oder Parkinson

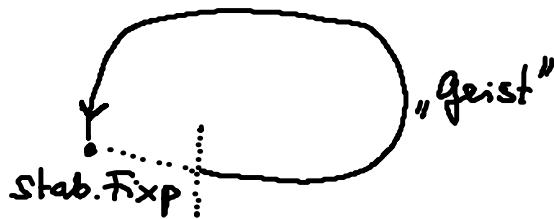
Anregbarkeit

Beispiel: Neuronale Systeme, chem. Reaktion, Ionenkanäle, Laser, Klimadynamik

System hat stabilen Fixpt., ist aber im Parameterraum nahe einer Bifurkation ins oszillatorische Regime.

- Bei kleinen Störungen über eine Schwelle folgt das System dem „Geist“ des Grenzzyklus:

⇒ Emission einer Spike ⇒ Rückkehr in den stab. Fixpt. (Refraktärphase)



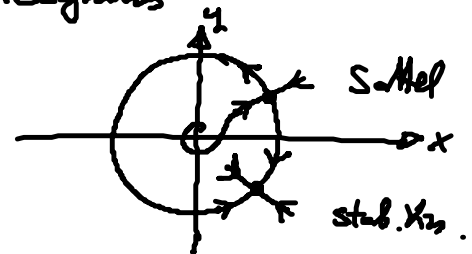
Typ-I Anregbarkeit

- Amplitude $\neq 0$
- Frequenz $\rightarrow 0$

⇒ Sattel-Knoten-Bif. auf einem Grenzzyklus

z.B.: SNIPER

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x^2-y^2) + y(x-b) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) + x(x-b) \end{aligned}$$



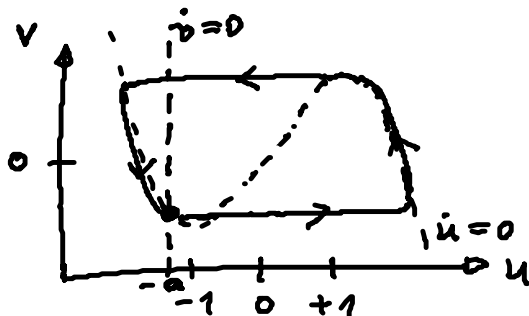
Typ-II Anregbarkeit

- Amplitude $\rightarrow 0$
- Frequenz $\neq 0$

⇒ Hopf-Bifurkation

Beispiel Fitz Hugh - Nagumo (FHN)

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{u} &= u - \frac{u^3}{3} - v \\ \dot{v} &= u + a \end{aligned}$$



u Aktivator (schnell) Membranpot.

v Inhibitor (langsam)

ϵ Zeitskalenpar.

(klein $\epsilon \approx 0.01$)

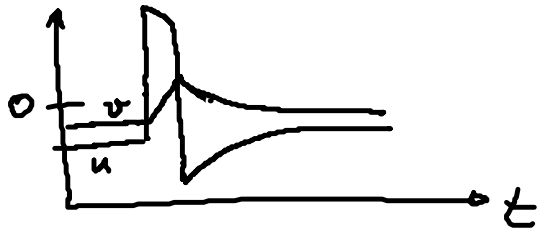
a Bifurkationspar.

$|a| > 1$ stab. Fixp. ⇒ anregbarer Bereich

$|a| = 1$ Hopf-Bif.

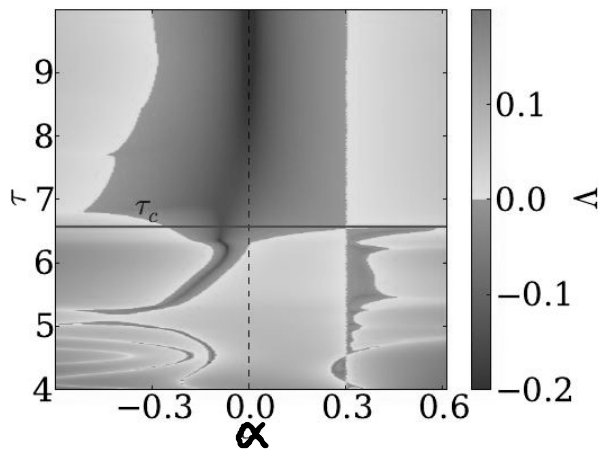
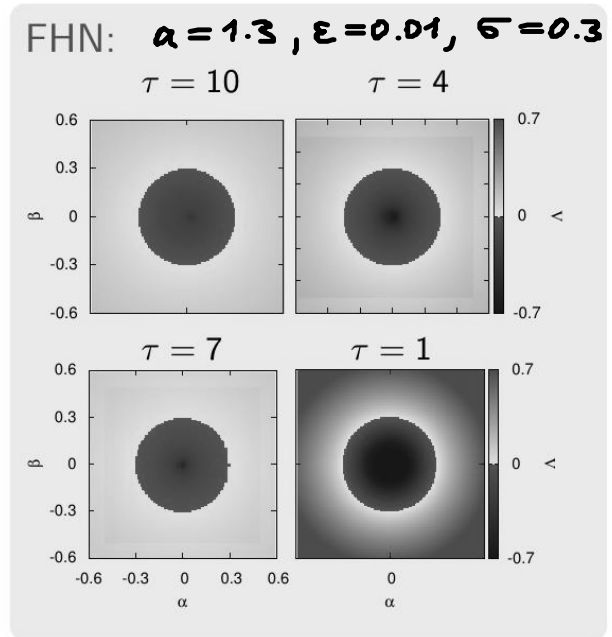
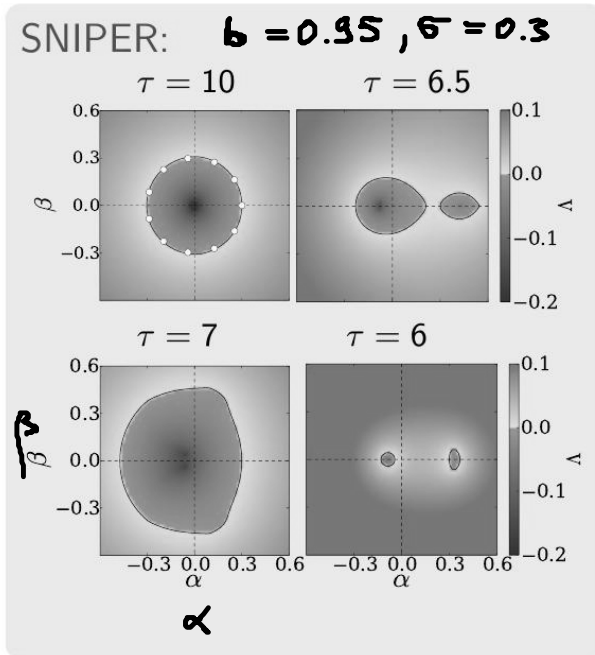
$|a| < 1$ stab. Grenzzyklus

⇒ oszillator. Bereich



Netzwerke aus anregbaren Knoten

Stabilität der Synchronisation \Rightarrow Master stability test.
 (obwohl Einzelsystem anregbar, oszilliert das Netzwerk wegen der zeitverzögerten Kopplung periodisch.)



SNIPER, $\sigma = 0.3, b = 0.95$

$\beta = 0$

Stabilitätsregionen

a) stabile Region = reskaliertes Einheitskreis

- FHN
- SNIPER für große τ

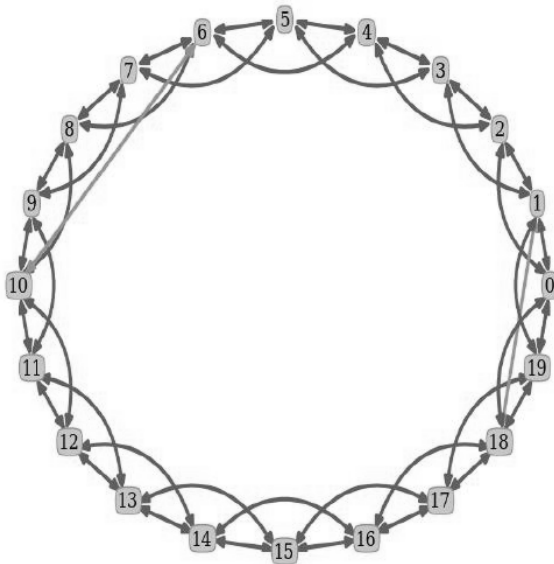
b) Stabilitätsinseln

- SNIPER für kleine τ

Desynchronisation in Small-World-Netzwerken (SW)

Betrachte Variation eines SW

- reguläres Netzwerk von exzitator. gekoppelten Knoten ($G_{ij} \geq 0$)
- k Kopplungstiefe im regulären Ring
- bidirektionale Links
- zusätzl. inhibitorische ($G_{ij} < 0$) Links mit Wahrscheinl. p
(kein rewiring)



$k=2$

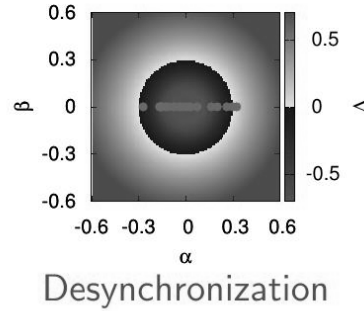
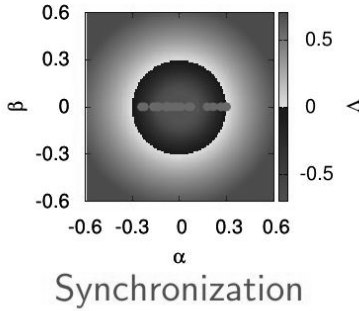
grün: exzitator.

rot: inhibitor. (langreichweitig)

- Zufallsprozess: verschiedene Realisierungen können unterschiedl. Stabilitätseigenschaften haben



$N=20$
 $k=2$
 $p=0.05$



FHN

Betrachte $f(p) = \frac{\# \text{ desynchronisierter Realisierungen}}{\# \text{ aller Realisierungen}}$

Fall a) Stabiler Bereich \Leftrightarrow reskaliertes Einheitskreis

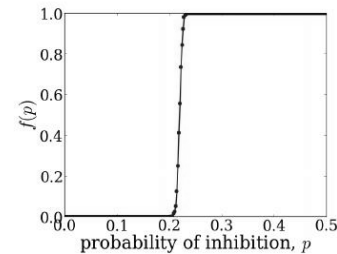
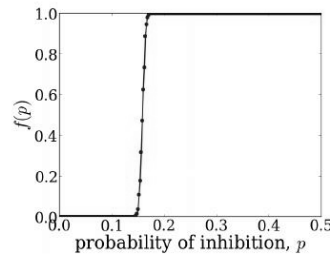
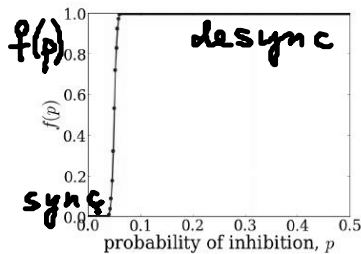
$k=20$

$k=40$

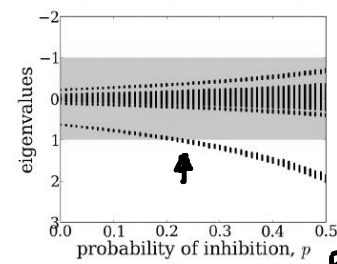
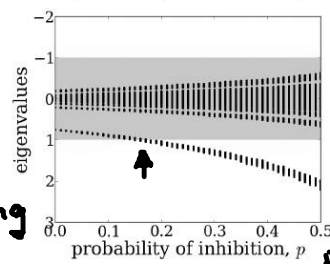
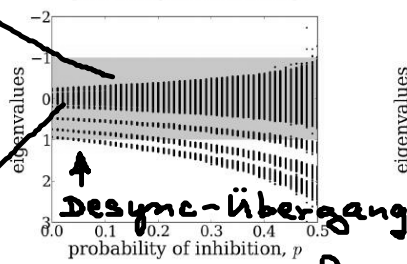
$k=50$

SNIPER

$b=0.95$
 $\sigma=0.3$
 $N=200$



stab. Bereich der MSF (gmin)



Eigenwert-spektrum der Kopplungsmatrix

Inhibition verursacht Übergang in desynchron. Zustand

Fall b) Stabilitätsinseln

$k = 20$

$k = 40$

$k = 50$

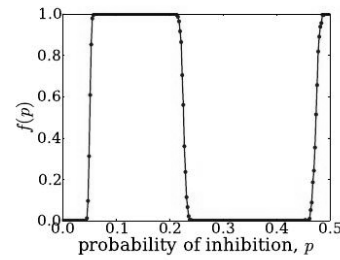
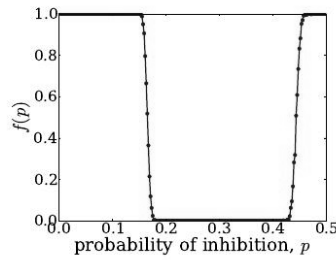
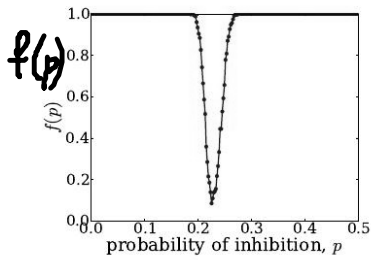
SNIPER

$\tau = 6.5$

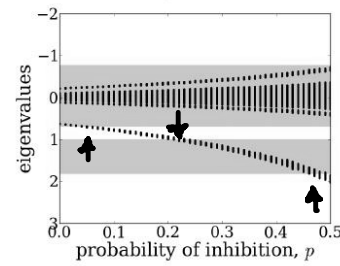
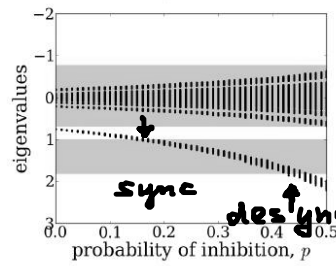
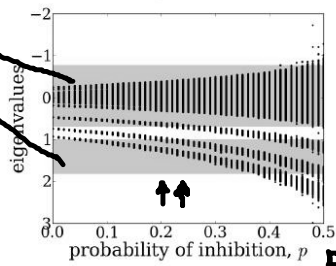
$\sigma = 0.3$

$b = 0.95$

$N = 200$



Stab. Inseln



- Mehrfache Übergänge zwischen Syncron. u. Desyncron.
- Synchronisation: Instabile Regionen müssen zu Lücken im Eigenwertspektrum passen
 ⇒ hängt empfindlich von exzitator.-inhibitor. Balance ab

Zusammenfassung:

Anregbar-keit	Bif.	hier betracht. Beispiel	stabiler Bereich des MSF	Desynchronis.-Übergänge
Typ-I	SNIPER	SNIPER-Normalform	τ klein: Stab. Inseln	mehrfache Übergänge zw. Sync. und Desync Inhibition führt zu einem Übergang zu Desync.
Typ-II	Hopf	FHN	τ groß: reskal. Einheitskreis	