Wh:

- eindimensionale Zufalls"größen"; Kontinuität

$\rightarrow$ Wahrsch.dichte $\rho(x)$

$$\langle x \rangle = \int dx\, \rho(x)\, x$$

$$M_\nu := \int dx\, \rho(x)\, x^\nu$$

Erzeugende $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle$ — $\left.\frac{\partial^\nu Z(\alpha)}{\partial \alpha^\nu}\right|_{\alpha=0} = M_\nu$

der Kumulanten $\Gamma(\alpha) = \ln Z(\alpha)$

- mehrdimensional: $Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha} \cdot \underline{x}} \rangle$

Speziell für zwei unkorrelierte Zufallsvariablen x_1, x_2 gilt

$$Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \rangle$$

Faktorisierung!

$$= \int dx_1 \int dx_2\, \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)\, e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2}$$

$$= \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle$$

$$\ln Z(\underline{\alpha}) = \Gamma(\underline{\alpha}) = \ln \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle + \ln \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle$$

Korrelationsmatrix

x_k, x_l : Elemente von $\underline{x}$

$$(\underline{\underline{C}})_{kl} = \langle (x_k - \langle x_k \rangle)(x_l - \langle x_l \rangle) \rangle$$

umschreibe

$$(\underline{\underline{C}})_{kl} = \langle \overbrace{\Delta x_k}^{x_k - \langle x_k \rangle} \Delta x_l \rangle$$

$$= \langle x_k x_l \rangle - \langle x_k \langle x_l \rangle \rangle - \langle \langle x_k \rangle x_l \rangle + \langle x_k \rangle \langle x_l \rangle$$

$$= \langle x_k x_l \rangle - \cancel{\langle x_k \rangle \langle x_l \rangle} - \langle x_k \rangle \langle x_l \rangle + \cancel{\langle x_k \rangle \langle x_l \rangle}$$

$$= \langle x_k x_l \rangle - \langle x_k \rangle \langle x_l \rangle$$

z.B. mehrdimensionale Gaußverteilung

$$\rho(\underline{x}) = (2\pi)^{-d/2} (\mathrm{Det}\,\underline{\underline{A}})^{-\frac{1}{2}} \, e^{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \langle \underline{x} \rangle)^T \underline{\underline{A}}^{-1} (\underline{x} - \langle \underline{x} \rangle)}$$

Hier folgt:

$$\left(\underline{\underline{G}}\right)_{kl} = \left(\underline{\underline{A}}\right)_{kl}$$

allgemein: $\left(\underline{\underline{G}}\right)_{kl} = 0$ für $k \neq l$

"Die Zufallsvariablen sind unkorreliert"

Zentraler Grenzwertsatz

Gegeben sei eine Summe unabhängiger Zufallsgrößen

$$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_d$$

unkorreliert (d.h. z.B. $\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$ etc.)

Für sehr große d folgt unabhängig von der speziellen Form der Einzelwahrsch.

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta X} e^{-\frac{1}{2\langle \Delta X^2 \rangle}(X - \langle X \rangle)^2}$$

Gaußverteilung!

1.2. Markov-Prozess

Generell: Ein stochastischer Prozess
beschreibt die Zeitentwicklung
einer Zufallsvariable X

Betrachte im Folgenden $d=1$ und
diskretisierte Zeiten

Es sei: x_1 : Wert von X zur Zeit t_1
x_2 : " " " " " t_2
⋮
x_n : " " " " " t_n

und $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$

Zeitabhängige Verbundwahrscheinlichkeit

$$p(x_1,t_1; x_2,t_2; x_3,t_3; \ldots, x_n,t_n)$$

Wahrsch., dass zur Zeit t_1 der Wert x_1,
zur Zeit t_2 der Wert x_2, ... , . . . vorliegt

Betrachte nun bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(\underbrace{x_{n+1}, t_{n+1}; \dots ; x_{n+m}, t_{n+m}}_{\text{"Zukunft"}} \,|\, \underbrace{x_1, t_1; \dots}_{\text{"Vergangenheit"}} ; \underbrace{x_n, t_n}_{\text{"Gegenwart"}})$$

Wahrsch. für das Auftreten von x_{n+1} bei t_{n+1}, ..., x_{n+m} bei t_{n+m} unter der Bedingung, dass bei t_1 x_1, ..., bei t_n x_n vorlag

Erinnerung:

$P(A|B)$: Wahrsch. für das Auftreten von A unter der Bedingung, dass B vorliegt)

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ ← Verbundwahrsch.

Dann folgt:

$$p(x_{n+1}, t_{n+1}; \dots ; x_{n+m}, t_{n+m} \,|\, x_1, t_1; \dots ; x_n, t_n)$$

$$= \frac{p(x_1,t_1; \dots ; x_{n+m}, t_{n+m})}{p(x_1,t_1; \dots ; x_n,t_n)}$$

speziell: $m=1$

$$p(x_{n+1}, t_{n+1} | x_1,t_1; \dots ; x_n,t_n)$$

Wahrsch. für das Auftreten von x_{n+1} in der Zeitpunkt t_{n+1}, falls bei t_1 x_1 ..... vorlag

Diese bedingte Wahrsch. nennt man häufig auch

Übergangswahrscheinlichkeit

Klassifizierung stochastischer Prozesse

a) Reiner Zufallsprozeß

Faktorisierung!

$$p(x_1,t_1; \dots ; x_n,t_n) = p(x_1,t_1) \dots p(x_n,t_n)$$

Folgerung: $p(x_{n+1},t_{n+1} | x_1,t_1, \dots ; x_n,t_n) = p(x_{n+1},t_{n+1})$

Es gibt also keine Korrelation zwischen Ereignissen zu verschiedenen Zeitpunkten

b) Markov-Prozess

Übergangswahrsch.

$$p(x_{n+1}, t_{n+1} | x_1, t_1; \ldots ; x_n, t_n) \overset{!}{=} p(\underbrace{x_{n+1}, t_{n+1}}_{\text{"Zukunft"}} | \underbrace{x_n, t_n}_{\text{"Gegenwart"}})$$

Beim Markov-Prozeß wird die Zukunft (t_{n+1}) nicht durch die gesamte Vergangenheit, sondern nur durch die Gegenwart (t_n) bestimmt!

man sagt:

Der Markov-Prozeß ist ein stochastischer Prozeß ohne Gedächtnis !

(unabhängig von der Vergangenheit)

Häufig ist dies eine gute Approximation, trotzdem sind Gedächtniseffekte wichtig !

<u>Folgerung für die Verbundwahrsch.</u>

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$p(x_1,t_1;\dots;x_n,t_n)$$

$$\overset{\text{allg.}}{=} p(x_n,t_n|x_1,t_1;\dots,x_{n-1},t_{n-1})\cdot p(x_1,t_1;\dots;x_{n-1},t_{n-1})$$

$$\overset{\text{Markov}}{=} p(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})\, p(x_1,t_1;\dots,x_{n-1},t_{n-1})$$

$$= p(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})\, p(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},t_{n-2})\, p(x_1,t_1,\dots x_{n-2},t_{n-2})$$

Prozedur wiederholen

$$\Rightarrow p(x_1,t_1;\dots,x_n,t_n)$$

Markov!

$$= p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$
$$\cdot\, p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2})$$
$$\cdot \; \ldots \; \cdot\, p(x_1, t_1)$$

„Markov-Kette"

Betrachte nun konkret 3 Zeiten

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3)$$
$$\underset{\text{Markov-Prozess}}{=} p(x_3, t_3 | x_2, t_2)\, p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot p(x_1, t_1)$$

Integriere (bzw. summiere für diskrete Variablen) über alle Zustände x_2

Verabrede: $\int dx_2\, p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = p(x_1, t_1; x_3, t_3)$

$\Rightarrow p(x_1,t_1; x_3,t_3)$

$$= \int dx_2 \; p(x_3,t_3|x_2,t_2)\, p(x_2,t_2|x_1,t_1) \cdot p(x_1,t_1)$$

$$\left(\sum_{x_2} \dots\right)$$

Auf der rechten Seite können wir $p(x_1,t_1)$ aus dem Integral herausziehen!

Dividiere durch $p(x_1,t_1)$

$$\boxed{\Rightarrow p(x_3,t_3|x_1,t_1) = \int dx_2 \; p(x_3,t_3|x_2,t_2) \cdot p(x_2,t_2|x_1,t_1)}$$

„Chapman-Kolmogorov-Gleichung"!

Interpretation:

Die Übergangswahrsch. vom Ausgangszustand x_1 bei t_1 zum Endzustand x_3 bei t_3 entspricht dem Produkt der Übergangswahrsch. vom Ausgangszustand zu einem Zwischenzustand x_2 bei t_2 und der Übergangswahrsch. vom Zwischen- zum Endzustand — integriert bzw. summiert über alle möglichen Zwischenzustände!

Chapman-Kolmogorov-Gl.:
Ausgangspunkt für die Herleitung der Mastergleichung!

1.3. Stationäre stochastische Prozesse, Autokorrelationsfunktion

Stationärer Prozess

$\Leftrightarrow$ Die Eigenschaften ändern sich nicht bei Verschiebung der Zeitachse (Zeittranslationsinvarianz)

$$p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$$
$$= p(x_1, t_1+\tau; \dots; x_n, t_n+\tau)$$

Folgerung

- Die einzeitige Wahrsch. $p(x_1, t)$ ist zeitunabhängig, und ebenso alle Momente

$$p(x_1, t) = p(x_1)$$
$$M_\nu(t) = M_\nu$$

- Die zweizeitige Verbundwahrsch. hängt nur von der Differenz der Zeiten ab

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2)$$

$$= p(x_1, 0; x_2, \underbrace{t_2 - t_1}_{\tau})$$

stat. Prozess

Zeitnullpunkt beliebig

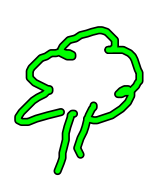
Folgerung für Übergangswahrscheinlichkeit

$$p(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2)}{p(x_1, t_1)}$$

$$= \frac{p(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1)}{p(x_1)}$$

Stationarität

$$= p(x_2, t_2 - t_1 | x_1, 0)$$



Beim Markov-Prozess können alle Verbundwahrsch. als Produkte von Übergangswahrsch. und einzeitige Wahrsch. geschrieben werden (Markovkette)

$\Rightarrow$ Es treten also überall nur Zeitdifferenzen auf!