

Wn:
 Modell A:
$$\frac{\partial \Phi(\underline{r}, t)}{\partial t} = -M \frac{\delta F}{\delta \Phi} + \gamma(\underline{r}, t) \overset{FD}{\leftarrow}$$

Relaxationsbeitrag

$\Phi \Rightarrow$ sucht Minimum von $F[\Phi]$ zu
 typischerweise: $F[\Phi]$ Sättigung-Landau

Wn: keine treibende Kraft

\Rightarrow System strebt flachgewichts Zustand zu

Modell B:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\nabla j(\underline{r}, t) + \{(\underline{r}, t)\} \text{Gln} + \text{Hilddid}$$

$j \sim \frac{\delta F}{\delta \Phi}$

Konkrete Anwendung von Modell A:

Dynamik der Magnetisierung eines Ferromagneten
 $\Phi(\underline{r}, t) \rightarrow M(\underline{r}, t)$

$$F[M] = \int dV \left(\frac{a}{2} (T - T_c) M^2 + \frac{b}{4} M^4 + \frac{c}{2} (\nabla M)^2 - hM \right)$$

\uparrow
 krit. Temperatur

\uparrow
 äußeres Magnetfeld

Gleichgewicht

Das statistische Gewicht einer lat. Konfiguration $M(\underline{r})$ ist gegeben durch $e^{-\beta F[M]}$ ($\Leftrightarrow P(M) \sim e^{-\beta F[M]}$)

\Rightarrow Gleichgewichts- (wahrscheinlichste) Konfiguration aus

$$\frac{\delta F}{\delta M} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow a(T - T_c) M(\underline{r}) + b(M(\underline{r}))^3 - c \Delta M(\underline{r}) - h(\underline{r}) = 0$$

homogener Fall: $a(T - T_c) M + bM^3 - h = 0$ (*)
 ($\Delta M = 0$)

Schritt für Schritt $h \rightarrow 0$

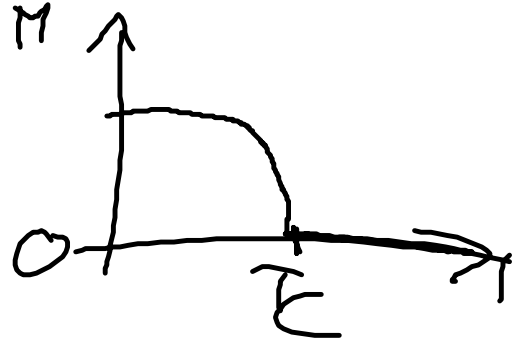
Magnetisierung: Di die \otimes durch M
(bedeutet: $M \neq 0$ für $T < T_c$)

$$a(T - T_c) + bM^2 = 0$$

negativ für $T < T_c$

$$\Rightarrow M \sim (T_c - T)^{\frac{1}{2}}$$

Meanfield-Verhalten



Suszeptibilität:
 $\chi = \frac{\partial M}{\partial h} \Big|_{h \rightarrow 0}$

aus \otimes : $a(T - T_c) \frac{\partial M}{\partial h} + 3bM^2 \frac{\partial M}{\partial h} - 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial h} (a(T - T_c) + 3bM^2) = 1$$

Sei $T > T_c$: $M = 0$ für $h \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \chi = \frac{\partial M}{\partial h} \Big|_{h=0} = \frac{1}{a(T - T_c)} \sim (T - T_c)^{-1}$$

Meanfield:

Spin-Spin-Korrelationsfunktion (hier ohne Hebel)

$$G_{MM}(|\underline{r}-\underline{r}'|) = \langle M(\underline{r}) M(\underline{r}') \rangle \sim \frac{e^{-|\underline{r}-\underline{r}'|/\xi}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

ξ Korrelationslänge

Es gilt:

$$\xi \sim (T - T_c)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \xi \rightarrow \infty \text{ für } T \rightarrow T_c$$

$$\text{damit: } \frac{e^{-|\underline{r}-\underline{r}'|/\xi}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \xrightarrow{T \rightarrow T_c} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

räuml. Korrelationen werden langreichweitig

„kritische Opaleszenz“

Frage:

Zeitl. Verhalten (Relaxationsverhalten)

den Ordnungsparameter dicht am krit. Punkt?

Ansatz für die Langevin (nicht erhaltene
Ordnungsparameter!)
 \Rightarrow Modell A

$$\frac{\partial M(\underline{r}, t)}{\partial t} = -\lambda \frac{\delta F[M]}{\delta M(\underline{r}, t)} + \eta(\underline{r}, t) \quad (*)$$

statische Kraft durch
 "kannibalen" zerstörte
 Freiheitsgrade
 z.B. Gitterstörungen (Phonon)

es gilt:

$$\langle \eta(\underline{r}, t) \rangle = 0$$

$$\langle \eta(\underline{r}, t) \eta(\underline{r}', t') \rangle = 2 \underbrace{\lambda k_B T}_{\text{FDI!}} \delta(\underline{r} - \underline{r}') \delta(t - t')$$

Setze in (*) die Variations ableitung von F ein

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} M(\underline{r}, t) = -\lambda \left(a(F-T_c) M(\underline{r}, t) + b(M(\underline{r}, t))^3 - c \Delta M(\underline{r}, t) + \eta(\underline{r}, t) \right)$$

betriebe
 $h=0$

betrachte nun Quasikristalle

$\Rightarrow b(M(\underline{k}, t))$ wird
vernachlässigt

Auswertung im Fourierraum

$$\hat{M}(\underline{k}, t) = \int d\underline{r} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} M(\underline{r}, t)$$

$$\hat{\eta}(\underline{k}, t) = \int d\underline{r} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} \eta(\underline{r}, t)$$

$$\Delta M(\underline{r}, t) \longrightarrow -k^2 \hat{M}(\underline{k}, t)$$

$$\langle \hat{\eta}^2(\underline{k}, t) \rangle \sim 0 \quad \underline{R} = \underline{r} - \underline{r}'$$

$$\hat{E}(k) = \int d\underline{R} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{R}} \underbrace{\langle \eta(\underline{r}, t) \eta(\underline{r}', t') \rangle}_{\sim d(\underline{R})} = 2\lambda \int d\underline{R} d\underline{r} d\underline{r}'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{M}(\underline{k}, t)$$

$$= -\lambda (a(T - T_c) + ck^2) \hat{M}(\underline{k}, t)$$

$$+ \hat{\eta}^2(\underline{k}, t)$$

siehe $\gamma_k = \lambda (a(T - T_c) + ck^2)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \epsilon} \tilde{M}(\underline{k}, \epsilon) = -\gamma_{\underline{k}} \tilde{M}(\underline{k}, \epsilon) + \tilde{\eta}(\underline{k}, \epsilon)$$

Beachte:

Diese Gleichung hat genau dieselbe Struktur wie die Ising-Kante, nicht-überdampft

Langevin-Gl.:

$$(\text{in } \mathbb{D}) \quad \dot{v} = -\gamma v + f(t)$$

Wir können sofort schließen

$$\Rightarrow M(\underline{k}, \epsilon) = \tilde{M}(\underline{k}, 0) e^{-\gamma_{\underline{k}} t} + e^{-\gamma_{\underline{k}} t} \int_0^{\epsilon} dt' e^{\gamma_{\underline{k}} t'} \tilde{\eta}(\underline{k}, t')$$

Mittelwert über das Rauschen.

$$\langle \tilde{M}(\underline{k}, \epsilon) \rangle = \langle \tilde{M}(\underline{k}, 0) \rangle e^{-\gamma_{\underline{k}} \epsilon} \quad \begin{array}{l} \text{für } \epsilon \gg 0, \text{ d.h. } T > T_c \\ \rightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \infty \end{array}$$

Korrelationsfunktion

$$\langle \tilde{M}(\underline{k}, \epsilon) \tilde{M}(\underline{k}, \epsilon') \rangle$$

$$= \frac{2 \lambda V_B T}{2 \gamma_H} e^{-\gamma_H (t-t')}$$

$$+ e^{-\gamma_H (t+t')} \left(\langle M(\underline{k}, 0)^2 \rangle - \frac{2 \lambda V_B T}{2 \gamma_H} \right)$$

2. Term auf der rechten Seite ist nicht relevant

- wird vernachlässigbar für große Zeiten $t, t', t+t' \gg \frac{1}{\gamma_H}$

- außerdem:

$$\langle M(\underline{k}, 0)^2 \rangle$$

liefert nach Gleichverteilungssatz
(Gleichgewicht!)

eine Konstante, die dem 2. Term entspricht

(....) verschwindet!

Prüfe Vorzeichen!

$$\Rightarrow \langle \hat{M}(k, t) \hat{M}(k, t') \rangle$$

$$= \frac{k_B T \lambda}{\gamma_k} e^{-\gamma_k |t-t'|}$$

Einsatz von $\gamma_k = \lambda (a(T-T_c) + ck^2)$

$$\rightarrow \langle \hat{M}(k, t) \hat{M}(k, t') \rangle$$

$$= \frac{k_B T}{a(T-T_c) + ck^2} e^{-\gamma_k |t-t'|}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\gamma_k}$ hat die Funktion einer Relaxationszeit

• Bei Letzen $k=0$ nimmt die Relaxationszeit bei Annähern an den krit. Punkt $(T \rightarrow T_c)$ drastisch zu !!

(insbesondere)

$$\gamma_{k \rightarrow 0} = \lambda a(T-T_c) \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{\gamma_{k \rightarrow 0}} \rightarrow \infty$$

$$\gamma_{k \rightarrow 0}$$

"Critical Slowing down"

Typisches Phänomen in der Nähe eines Phasitzyg
Zweite Ordnung!