3.3 Beispiele

a) Diskrete Verteilungen

(i) Binomial-Verteilung

$$\boxed{P_N(N_A) = \binom{N}{N_A} p^{N_A} q^{N-N_A}} \quad (3.21)$$

... Wahrscheinl. für N_A Ausgänge A bei N Einzelexp.

$x = A, B$ mit $P(A) = p$
$P(B) = q = 1-p$

· charakt. Funktion:

$$G_N(k) = \langle e^{-ikN_A} \rangle = (pe^{-ik} + q)^N$$

damit: $\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np$, $\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = Npq$

Beweis:

1. $\ln G_N(k) = N \underbrace{\ln(pe^{-ik}+q)}_{\ln G_1(k):\text{ für einen Versuch}}$ } Kumulante für N Versuche = Kumulante für 1 Versuch $\times N$

2. Kumulanten:

ein Versuch: Momente:

$$\langle N_A^n \rangle \underset{N_A=0,1}{=} 1^n p + 0^n q = p$$

N Versuche: $\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = N p$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 \underset{\langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2}{=} N(p-p^2) \underset{p(1-p)}{=} Npq$$

$$\longrightarrow \frac{\Delta N_A}{N} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}} \; !$$

Mittelwert wird immer schärfer für $N \to \infty$

- Grenzfall $N \to \infty$:

  $$P_N(N_k) \xrightarrow[\text{Grenzwertsatz (s. Kap. 3.5)}]{} \text{Gaußsche Verteilung}$$

  zentraler Grenzwertsatz (s. Kap. 3.5)

(ii) Poisson-Verteilung

- Geg: Voneinander unabhängige, „seltene" Einzelereignisse im festen Bereich (Zeit, Strecke, Fläche, ...), die mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen.

  Ges: Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für x Einzelereignisse mit $\langle x \rangle = \lambda$

  $$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}} \qquad (3.22)$$

  $x = 0, 1, \ldots.$

- Bsp. (1) radioaktiver Zerfall in Zeit T

  Anzahl mittlerer Zerfälle $\lambda = \alpha T$, α ... Zerfallsrate

  $$\longrightarrow \quad P_T(x) = \frac{(\alpha T)^x e^{-\alpha T}}{x!}$$

  ... Wahrscheinlichkeit für x Zerfälle in T

(2) Dart mit $\underbrace{F(A) \ll F}_{\text{Treffer ist seltenes Ereignis}}$

- charakt. Funktion: für diskretes x

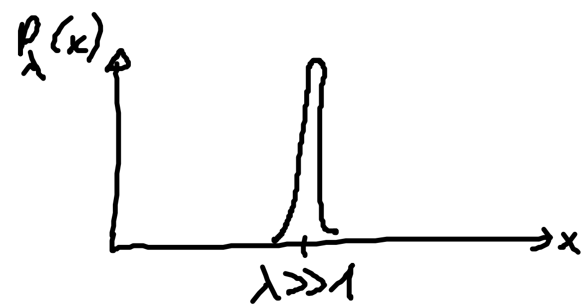
$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \exp\left[\lambda(e^{-ik}-1)\right] \qquad (3.23)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} (\lambda e^{-ik})^x e^{-\lambda}$$

$$\longrightarrow \ln G(k) = \lambda(e^{-ik}-1) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \qquad (3.24)$$

$$\xrightarrow{(3.16)} \boxed{\text{Kumulanten: } \langle x^n \rangle_c = \lambda}$$

insbesondere: $\dfrac{\Delta x}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{\langle x^2 \rangle_c}}{\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$



- Herleitung von $P_\lambda(x)$ als Grenzfall der Binomialverteilung (3.21):

$p \to 0$ („seltenes Ereignis")

$N \to \infty$

so daß $\langle N_A \rangle = Np = \lambda =$ konst.

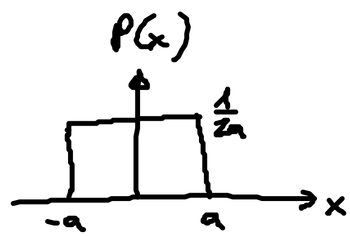
$$\boxed{P_N(N_A) \longrightarrow P_\lambda(N_A) = \frac{\lambda^{N_A} e^{-\lambda}}{N_A!}} \qquad (3.26)$$

Beweis: Übungen!

b) <u>kontinuierliche Verteilungen</u>:

(i) <u>homogene Verteilung</u>:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \qquad (3.27)$$



- Momente:

$$\langle x^n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{a(n+1)} \, a^{n+1} &, n \text{ gerade} \\ 0 &, n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bew. Übungen

- charakt. Funktion:

$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \frac{\sin ka}{ka} \quad , \quad G(0) = 1 \text{ ... Normierung!}$$

Bew. Übungen

- Kumulanten?

(ii) <u>Normal/Gaußsche Verteilung</u>

s.o.

(iii) <u>Exponentielle Verteilung</u>

$$P(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} &, x > 0 \\ 0 &, x < 0 \end{cases} \qquad (3.28)$$

Momente, charakt. Funktion, Kumulante (s. Übungen)

3.4 <u>Mehrdimensionale Verteilungen</u>

- stochastische Variablen: $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$P(\underline{x})\, d^n x$ ... Wahrscheinlichkeit für $[x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n]$

- unabhängige stochastische Variable: x, y

$$\boxed{P(x,y)\,dx\,dy = P(x)\,P(y)\,dx\,dy} \qquad (3.29)$$

... Multiplikationsregel

- <u>Def:</u> Korrelationsfunktionen:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{ij} &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \\ &= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \end{aligned}} \qquad (3.30)$$

... Kovarianzmatrix

zeigt an: Korrelationen von Fluktuationen um $\langle x_i \rangle$ und $\langle x_j \rangle$.

Bsp: $P(x,y) = P(x)\,P(y)$

$$\longrightarrow C_{xy} = \int dx\, dy\, P(x)\,(x - \langle x \rangle)\,P(y)\,(y - \langle y \rangle)$$
$$= 0!$$

- Wahrscheinlichkeitsdichte für $[x_1 + dx_1, \dots, x_{n-1} + dx_{n-1}]$

$$\boxed{P(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int dx_n\, P(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)} \quad (3.31)$$

- Satz:

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)$ für $x_1, \dots, x_k$, wenn $x_{k+1} \dots x_n$ mit Sicherheit vorliegen:

$$P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P(x_{k+1}, \dots, x_n)} \quad (3.32)$$

wobei $P(x_{k+1}, \dots, x_n) = \int dx_1 \dots dx_k\, P(x_1, \dots, x_n)$.

„Beweis": 1. $\int P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_k = 1!$ Normierung

2. $P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)\, P(x_{k+1} \dots x_n) = P(x_1 \dots x_n)$

stochastische unabh. Variable: $P(x|y) = \dfrac{P(x)\,P(y)}{P(y)} = P(x)\,!$

3.5 Zentraler Grenzwertsatz

- zentraler Satz für Stat. Mechanik

- **Satz:**

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_N$ voneinander unabhängige Zufallsvariable mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$, also insbesondere ist $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$ und $\Delta x_i = \Delta x$.
Dann genügt die Zufallsvariable $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_N$ im Grenzfall $N \to \infty$ der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta y)^2}}\, e^{-\frac{(y-\langle y \rangle)^2}{2(\Delta y)^2}} \qquad (3.33)$$

mit $\langle y \rangle = N \langle x \rangle$ und $\Delta y^2 = N\, \Delta x^2$

Insbesondere gilt: $\dfrac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \dfrac{\Delta x}{\langle x \rangle \sqrt{N}}$ also

Aussagen über y sind für große N scharf.

- **Bsp.** (i) System nicht wechselwirkender Teilchen
  x_i = Energie des i-ten Teilchen
  y = Gesamtenergie

  (ii) Zufallsbewegung („random walk")
  insbes. Brownsche Bewegung

  x_i = Zuwachs beim i-ten (mikroskopischen) Schritt
  (z.B. durch Stöße der Flüssigkeitsmoleküle)
  y = Position nach N Schritten

- **Beweis:**

Führe ein: $z(\{x_i\}) = \sum_i \dfrac{x_i - \langle x \rangle}{\sqrt{N}} = \dfrac{y - N\langle x \rangle}{\sqrt{N}} \qquad (3.34)$

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(z) \overset{(3.8)}{=} \langle \delta(z - z(\{x_i\})) \rangle$$

$$= \int dx_1 \dots dx_N \underbrace{w(x_1) \dots w(x_N)}_{\text{„unab. Ereignisse"}} \; \delta\left(z - \frac{x_1 + \dots + x_N}{\sqrt{N}} + \sqrt{N}\langle x \rangle\right)$$

$$\left[\delta(\dots) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik\dots}\right] = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \int dx_1 \dots dx_N \, w(x_1) \dots w(x_N) \, e^{-ik\frac{x_1 + \dots x_N}{\sqrt{N}} + ik\sqrt{N}\langle x \rangle}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz + ik\sqrt{N}\langle x \rangle} \left[\underbrace{G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)}_{\text{charakt. Funktion zu } w(x)}\right]^N$$

$$\text{mit } G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right) \underset{\text{Kumulanten einführen}}{\overset{(3.16)}{=}} \exp\left[-i\frac{k}{\sqrt{N}} \underbrace{\langle x \rangle_c}_{\langle x \rangle} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{N} \underbrace{\langle x^2 \rangle_c}_{(\Delta x)^2} + i\frac{1}{6}\frac{k^3}{N^{3/2}} \langle x^3 \rangle_c + \dots\right]$$

$$P(z) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz - \frac{1}{2}k^2 \Delta x^2 + i\frac{1}{6}\frac{k^3}{\sqrt{N}} \langle x^3 \rangle_c + \dots}$$

jetzt: $N \to \infty$

$$G_p(k) = e^{-\frac{1}{2}k^2 \Delta x^2} \quad !$$

$$\overset{(3.19)}{\longrightarrow} \quad P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta x)^2}} e^{-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}}$$

$$\text{mit } P(z)dz = P(y)dy \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} \overset{(3.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\longrightarrow \quad P(y) \overset{(3.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\Delta x)^2}} e^{-\frac{(y - N\langle x \rangle)^2}{2N(\Delta x)^2}} \qquad \text{qed}$$

- **Bem:** (3.33) auch gültig für abhängige x_i unter gewissen Bedingungen