$$\boxed{\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4}\int d^3q_1\, d^3p_1 \dots d^3p_4\; K(\dots)\left[f_1 f_2 - f_3 f_4\right] \ln\frac{f_1 f_2}{f_3 f_4} \leq 0} \quad (4.26)$$

mit $H = \int d^3q\, d^3p\; f \ln f$

4.3.3 Gleichgewichtseigenschaften

(i) Gleichgewichtsverteilungen:

- Gas im Gleichgewicht, falls $\frac{dH}{dt} = 0$

$$\xrightarrow{(4.26)} \quad f_1 f_2 = f_3 f_4 \longrightarrow \underbrace{\ln f_1 + \ln f_2}_{\substack{\text{vor}\\ \text{nach}}} = \underbrace{\ln f_3 + \ln f_4}_{\substack{\text{nach}\\ \text{vor}}} \quad \text{Stoß}$$

erfüllt durch additive Größen

$\longrightarrow$ Stoßinvarianten

$$\boxed{\begin{array}{lll} \chi^i = p_i\,, & i = 1,2,3 & \dots\ \text{Impuls} \\ \chi^4 = \frac{p^2}{2m} & & \dots\ \text{kinetische Energie} \\ \chi^5 = 1 & & \dots\ \text{Teilchenzahl} \end{array}} \quad (4.27)$$

$$\longrightarrow \ln f = a(q) + \underline{\alpha}(q)\cdot p - \beta(q)\frac{p^2}{2m}$$

$$\longrightarrow \quad f(q,p) = \underbrace{N(q)}_{e^{a(q)}}\, \exp\left[\alpha(q)\cdot p - \beta(q)\frac{p^2}{2m}\right] \quad (4.28)$$

• Lokales Gleichgewicht:

Normierung: $\int d^3p\, f(q,p) = n(q,t)$ ... Teilchenzahldichte

$$n \overset{(4.28)}{=} N(q)\left[\int dp_i \exp\left(\alpha_i p_i - \beta \frac{p_i^2}{2m}\right)\right]^3 \qquad i=1,2,3 \quad \text{(keine Einstein'sche Summenkonv.)}$$

$$= N(q)\left[\int dp_i \exp\left\{-\frac{\beta}{2m}\left(p_i - \frac{m\alpha_i}{\beta}\right)^2 + \frac{m\alpha_i^2}{2\beta}\right\}\right]^3$$

$$= N(q)\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{m\alpha^2}{2\beta}\right) \quad (4.28a)$$

(4.28a) in (4.28) & Umbenennung $\longrightarrow$

$$\boxed{f(q,p,t) = n(q,t)\frac{1}{[2\pi m k_B T(q,t)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(p - m\underline{u}(q,t))^2}{2m k_B T(q,t)}\right]} \quad (4.29)$$

mit $n(q,t)$ ... Teilchendichte

$k_B T(q,t) = \beta^{-1}$ .... lokale Temperatur (s.u.)

$m\underline{u}(q,t) = \langle p\rangle = \frac{m\alpha}{\beta}$ ... lokaler mittlerer Impuls

... lokale Maxwell-Verteilung

" Gleichgewichtsverteilung

bis jetzt: $\left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = 0$

• globales Gleichgewicht: $(4.13) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \wedge \{H_1, f\} = 0$

für Gase im Vol. V mit $U=0$ (äußeres Pot.) $\longrightarrow$ $n = \frac{N}{V}$ = konstant

T = "

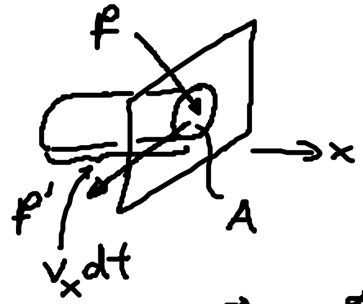
$\underline{u} = 0$

$$\longrightarrow \boxed{f(q,p) = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m k_B T}\right)} \quad (4.30)$$

.... Maxwellverteilung

(ii) <u>Zustandsgleichung</u>: für Gas mit N Teilchen im Vol. V

• Druck $\hat{=}$ Kraft auf Wand von reflektierten Teilchen



Zahl der Teilchen mit p, die A treffen in dt:

$$dN(p) = \underbrace{f(p)\, d^3p}_{\text{Dichte}}\, A\, v_x\, dt$$

$$\longrightarrow \quad F = \int_0^\infty dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \; f(p) \left(A \frac{p_x}{m}\, dt\right) \frac{2p_x}{dt}$$

$$\longrightarrow \quad P = \frac{F}{A} = \int d^3p\, f(p)\, \frac{p_x^2}{m} \overset{(4.30)}{=} \frac{n}{\beta}$$

$(k_B T)^{-1}$

$$\xrightarrow{n = \frac{N}{V}} \quad \boxed{PV = N k_B T\,, \text{ falls } \beta = \frac{1}{k_B T}} \qquad (4.31)$$

... Identifikation von T über ideale Gasgleichung!

4.4. Hydrodynamische Bewegungsgleichungen

- Weg ins Gleichgewicht:
  - (i) auf Zeitskala der Stöße τ_c
    $$f_2(\ldots) = f_1(\ldots)\, f_1(\ldots) \quad \text{für } |q_1 - q_2| \gg \text{Reichweite Ww-Potential}$$
  - (ii) in mittlerer stoßfreier Zeit $\tau \gg \tau_c$
    Stoßinvarianten gelten $\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relation}}$ lokales GG
    mit $n(q,t)$, $T(q,t)$
    lokale Erwartungswerte
    $$\langle A(q,t)\rangle = \int d^3p\, \underbrace{f(q,p,t)}_{\text{lokale Maxwell-verteilung (4.29)}} A(q,p,t)$$
    bestimmt durch Stoßterm $\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}}$ in (4.17)
  - (iii) Dynamik auf Zeiten $\tau_H \gg \tau$
    bestimmt durch Strömungsterm in (4.17)

$\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relaxation}}$ globales GG

τ_H bestimmt durch Zeitentwicklung von Erhaltungsgrößen =
= hydrodynamische Variable

4.4.1 Erhaltungssätze

• Stoßinvarianten $\longrightarrow$ Erhaltungsgrößen (4.32)

$\chi^5 = 1 \longrightarrow$ Teilchenzahldichte $n(q,t) \equiv \int d^3p \, 1 \, f := \langle 1 \rangle$

$\chi^i = p_i \longrightarrow$ Impulsdichte = $m \times$ Teilchenstromdichte $j_i(q,t)$

$$j_i(q,t) \equiv n(q,t)\, u_i(q,t) = \int d^3p \, \frac{p_i}{m} f = \langle \frac{p_i}{m} \rangle$$

$\chi^4 = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow$ Energiedichte

$$n(q,t)\Big[\underbrace{\frac{m\,u^2(q,t)}{2}}_{\substack{\text{kinet. Energie}\\ \text{der lokalen}\\ \text{konvektiven}\\ \text{Strömung}}} + \underbrace{e(q,t)}_{\substack{\text{innere Energie}\\ \text{pro Teilchen}\\ \text{= mittlere kinet.}\\ \text{Energie im lokalen}\\ \text{Ruhesystem}}}\Big] = \int d^3p \, \frac{p^2}{2m} f = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle$$

mit $n\underline{u} = \langle \frac{\underline{p}}{m} \rangle$

und $ne = \frac{m}{2}\int d^3p \left(\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}\right)^2 f = \langle \frac{m}{2} \big(\underbrace{\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}}_{\underline{c}}\big)^2 \rangle$

<u>Beweis</u>: $\langle \frac{p^2}{2m} \rangle = \frac{m}{2} \langle \left(\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u} + \underline{u}\right)^2 \rangle$

$$= n\frac{m}{2}\underline{u}^2 + \underbrace{\frac{m}{2}\langle \left(\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}\right)^2 \rangle}_{ne} + mn\underline{u}\underbrace{\langle \frac{\underline{p}}{m} - \underline{u} \rangle}_{=0}$$

• <u>Bilanzgleichungen für Erhaltungsgrößen</u>

<u>allgemein</u>: $\int d^3p$ Boltzmann Gl. (4.A) $\times \chi^\alpha$

[<u>NB.</u> $\int d^3p \, \frac{df}{dt}\Big|_{\text{Stoß}} \chi^\alpha = 0$

Beweis: Wie beim H-Theorem]

$$\longrightarrow \int d^3p\, \underline{\chi}^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\, p\cdot\nabla_q + \underline{F\cdot\nabla_p}\right] f(q,p,t) = 0$$

$$= \underline{F}\cdot\left[\underbrace{\nabla_p(\chi^\alpha f)}_{\hookrightarrow \text{ Oberflächenterm } = 0} - f\,\nabla_p \chi^\alpha\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi^\alpha = 0 = \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial q} \longrightarrow$$

$$\int d^3p \left[\frac{\partial}{\partial t}(\chi^\alpha f) + \frac{1}{m}\, p\cdot\nabla_q(\chi^\alpha f) - f\, \underline{F}\cdot\nabla_p\chi^\alpha\right] = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\langle\chi^\alpha\rangle}_{\text{Dichte}} + \underbrace{\nabla_q\cdot\frac{1}{m}\langle p\chi^\alpha\rangle}_{\text{div (Stromdichte)}} = \underbrace{\underline{F}\cdot\langle\nabla_p\chi^\alpha\rangle}_{\text{Quelle / Senke}}} \quad (4.33)$$

... Bilanzgleichung für Dichte $\langle\chi^\alpha\rangle$

Anwendung auf

(i) Teilchenzahldichte: $\chi^5 = 1 \xrightarrow[(4.33)]{(4.32)}$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_q\cdot j = 0 \\ \text{mit } j = n\,\underline{u} = \langle \tfrac{p}{m}\rangle\end{gathered}} \quad (4.34)$$

... Kontinuitätsgleichung