

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4} \int d^3q_1 d^3p_1 \dots d^3p_4 K(\dots) [f_1 f_2 - f_3 f_4] \ln \frac{f_1 f_2}{f_3 f_4} \leq 0 \quad (4.26)$$

### 4.3.3 Gleichgewichtseigenschaften

mit  $H = \int d^3q d^3p f \ln f$

(i) Gleichgewichtsverteilungen:

• Gas im Gleichgewicht, falls  $\frac{dH}{dt} = 0$

$$(4.26) \quad f_1 f_2 = f_3 f_4 \rightarrow \underbrace{\ln f_1 + \ln f_2}_{\substack{\text{vor} \\ \text{nach}}} = \underbrace{\ln f_3 + \ln f_4}_{\substack{\text{nach} \\ \text{vor}}} \quad \text{Sto\ss}$$

erfüllt durch additive Größen

→ Sto\ss invarianten

$$\begin{aligned} \chi^i &= p_i, & i=1,2,3 \dots & \text{Impuls} \\ \chi^4 &= \frac{p^2}{2m} & & \dots \text{kinetische Energie} \\ \chi^5 &= 1 & & \dots \text{Teilchenzahl} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\rightarrow \ln f = a(q) + \alpha(q) \cdot p - \beta(q) \frac{p^2}{2m}$$

$$\rightarrow f(q, p) = N(q) \exp[\alpha(q) \cdot p - \beta(q) \frac{p^2}{2m}] \quad (4.28)$$

↑  
 $e^{a(q)}$

• Lokales Gleichgewicht:

Normierung:  $\int d^3 p f(q, p) = n(q, t) \dots$  Teilchendichtedichte

$$n \stackrel{(4.28)}{=} N(q) \left[ \int dp_i \exp(\alpha_i p_i - \beta \frac{p_i^2}{2m}) \right]^3 \quad i=1,2,3 \quad (\text{keine Einstichel-Summenkonv.})$$

$$= N(q) \left[ \int dp_i \exp \left\{ -\frac{\beta}{2m} \left( p_i - \frac{m \alpha_i}{\beta} \right)^2 + \frac{m \alpha_i^2}{2\beta} \right\} \right]^3$$

$$= N(q) \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{m \alpha^2}{2\beta} \right) \quad (4.28a) \quad (4.29)$$

(4.28a) in (4.28)  
& Umbenennung

$$f(q, p, t) = n(q, t) \frac{1}{[2\pi m k_B T(q, t)]^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(p - m u(q, t))^2}{2m k_B T(q, t)} \right]$$

mit  $n(q, t) \dots$  Teilchendichte

$k_B T(q, t) = \beta^{-1} \dots$  lokale Temperatur (s.u.)

$m u(q, t) = \langle p \rangle = \frac{m \alpha}{\beta} \dots$  lokaler mittlerer Impuls

... lokale Maxwell-Verteilung  
" Gleichgewichtsverteilung

bis jetzt:  $\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stos}} = 0$

• globales Gleichgewicht: (4.13)  $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \wedge \{H, f\} = 0$

für Gase im Vol.  $V$

mit  $U=0$  (äußeres Pot.)

$$n = \frac{N}{V} = \text{konstant}$$

$$T = \text{konstant}$$

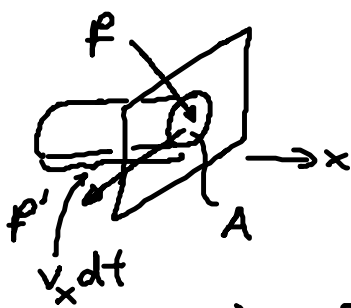
$$u = 0$$

$$\rightarrow f(q, p) = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \exp \left( -\frac{p^2}{2m k_B T} \right) \quad (4.30)$$

... Maxwellverteilung

(ii) Zustandsgleichung: für Gas mit  $N$  Teilchen im Vol.  $V$

• Druck  $\hat{=}$  Kraft auf Wand von reflektierten Teilchen



Zahl der Teilchen mit  $p$ , die  $A$  treffen in  $dt$ :

$$dN(p) = \underbrace{f(p) d^3 p}_{\text{Dichte}} A v_x dt$$

$$\rightarrow F = \int_0^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z f(p) (A \frac{p_x}{m} dt) \frac{2p_x}{dt}$$

$$\rightarrow P = \frac{F}{A} = \int d^3 p f(p) \frac{p_x^2}{m} \stackrel{(4.30)}{=} \frac{n}{\beta} \quad (k_B T)^{-1}$$

$$n = \frac{N}{V} \rightarrow \boxed{PV = N k_B T, \text{ falls } \beta = \frac{1}{k_B T}} \quad (4.31)$$

... Identifikation von  $T$  über ideale Gasgleichung!

#### 4.4. Hydrodynamische Bewegungsgleichungen

Weg ins Gleichgewicht:

(i) auf Zeitskala der Stöße  $\tau_c$

$$f_2(\dots) = f_1(\dots) f_1(\dots) \quad \text{für } |q_1 - q_2| \gg \text{Reichweite des Potentials}$$

(ii) in mittlerer stoßfreier Zeit  $\tau \gg \tau_c$

Stoßinvarianten gelten  $\xrightarrow{\text{Relation in}}$  lokales GG

mit  $n(q, t), T(q, t)$

lokale Erwartungswerte

$$\langle A(q, t) \rangle = \int d^3 p \underbrace{f(q, p, t)}_{\text{lokale Maxwellverteilung (4.29)}} A(q, p, t)$$

lokale Maxwellverteilung (4.29)

bestimmt durch Stoßterm  $\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Stoß}}$  in (4.17)

(iii) Dynamik auf Zeitskala  $\tau_H \gg \tau$

bestimmt durch Stoßterm in (4.17)

Relaxation  
in globales GG

$\tau_H$  bestimmt durch Zeitentwicklung von Erhaltungsgrößen =  
= hydrodynamische Variable

4.4.1 Erhaltungssätze

• Stoßinvarianten  $\rightarrow$  Erhaltungsgrößen

(4.32)

$\chi^5 = 1 \rightarrow$  Teilchenzahldichte  $n(\mathbf{q}, t) \equiv \int d^3p f := \langle 1 \rangle$

$\chi^i = p_i \rightarrow$  Impulsdichte =  $m \times$  Teilchenstahndichte  $j_i(\mathbf{q}, t)$   
 $j_i(\mathbf{q}, t) \equiv n(\mathbf{q}, t) u_i(\mathbf{q}, t) = \int d^3p \frac{p_i}{m} f = \langle \frac{p_i}{m} \rangle$

$\chi^4 = \frac{p^2}{2m} \rightarrow$  Energiedichte  
 $n(\mathbf{q}, t) \left[ \underbrace{\frac{m u^2(\mathbf{q}, t)}{2}}_{\substack{\text{kinet. Energie} \\ \text{der lokalen} \\ \text{konvektiven} \\ \text{Strömung}}} + \underbrace{e(\mathbf{q}, t)}_{\substack{\text{innere Energie} \\ \text{pro Teilchen} \\ = \text{mittlere kinet.} \\ \text{Energie im lokalen} \\ \text{Koordinatensystem}}} \right] = \int d^3p \frac{p^2}{2m} f = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle$

mit  $n \underline{u} = \langle \frac{\mathbf{p}}{m} \rangle$   
 und  $n e = \frac{m}{2} \int d^3p \left( \frac{\mathbf{p}}{m} - \underline{u} \right)^2 f = \langle \frac{m}{2} \left( \frac{\mathbf{p}}{m} - \underline{u} \right)^2 \rangle$

Beweis:  $\langle \frac{p^2}{2m} \rangle = \frac{m}{2} \langle \left( \frac{\mathbf{p}}{m} - \underline{u} + \underline{u} \right)^2 \rangle$   
 $= n \frac{m}{2} \underline{u}^2 + \underbrace{\frac{m}{2} \langle \left( \frac{\mathbf{p}}{m} - \underline{u} \right)^2 \rangle}_{n e} + m n \underline{u} \underbrace{\langle \frac{\mathbf{p}}{m} - \underline{u} \rangle}_{=0}$

• Bilanzgleichungen für Erhaltungsgrößen

allgemein:  $\int d^3p$  Boltzmann Gl. (4.4)  $\times \chi^\alpha$

$\left[ \text{NB: } \int d^3p \frac{dS}{dt} \Big|_{\text{Stoß}} \chi^\alpha = 0 \right]$   
 Beweis: Wie beim H-Theorem

$$\rightarrow \int d^3p \chi^\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + \underline{E} \cdot \nabla_p \right] f(q, p, t) = 0$$

$$= \underline{E} \cdot \left[ \nabla_p (\chi^\alpha f) - f \nabla_p \chi^\alpha \right]$$

$\hookrightarrow$  Oefflächen = 0

$$\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial t} \xrightarrow{0} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial q}$$

$$\int d^3p \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\chi^\alpha f) + \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q (\chi^\alpha f) - f \underline{E} \cdot \nabla_p \chi^\alpha \right] = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi^\alpha \rangle + \nabla_q \cdot \frac{1}{m} \langle p \chi^\alpha \rangle = \underline{E} \cdot \langle \nabla_p \chi^\alpha \rangle} \quad (4.33)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$  Dichte      $\underbrace{\hspace{1.5cm}}$  div (Strandichte)      $\underbrace{\hspace{1.5cm}}$  Quelle / Senke

... Bilanzgleichung für Dichte  $\langle \chi^\alpha \rangle$

Anwendung auf

(i) Teilchenzahlerhaltung:  $\chi^5 = 1 \xrightarrow{(4.32)} \xrightarrow{(4.33)}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_q \cdot j = 0} \quad (4.34)$$

mit  $j = n v = \langle \frac{p}{m} \rangle$

... Kontinuitätsgleichung