4.4 Hydrodynam. Bewegungsgleichungen

- Schnelle Relaxation zu lokalem GG: Maxwellverteilung

  Lokale Dichte $n(q,t)$

  " Temp. $T(q,t)$

  mittlere Geschw.: $\underline{u}(q,t)$

- Jetzt: Dynamik auf Zeiten $\tau_H \gg \tau$ ← mittlere stoßfreie Zeit

  → hydrodynam. Variable!
  folgen aus Erhaltungsgrößen

4.4.1 Erhaltungssätze

- Stoßinvariante → Erhaltungsgröße

beliebiges f!

$$\chi^5 = 1 \longrightarrow \text{Teilchenzahldichte:} \quad n(q,t) = \int d^3p \, 1 \, f := \langle 1 \rangle \tag{4.32}$$

$$\chi^i = p_i \longrightarrow \text{Impulsdichte} = m \times \text{Teilchenstromdichte } j_i(q,t)$$

$$j_i(q,t) = n(q,t)\, u_i(q,t) = \langle \tfrac{p_i}{m} \rangle$$

$$\chi^4 = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow \text{Energiedichte:} \quad n(q,t)\left[\frac{m u^2}{2} + e(q,t)\right] = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle$$

$$n e = \langle \frac{m}{2}\left(\frac{p}{m} - \underline{u}\right)^2 \rangle = \langle \frac{m}{2} \underline{c}^2 \rangle$$

- Bilanzgln. für Erhaltungsgrößen:

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\langle \chi^\alpha \rangle + \underline{\nabla}_q \cdot \frac{1}{m}\langle \underline{p}\, \chi^\alpha \rangle = \underline{F} \cdot \langle \nabla_p \chi^\alpha \rangle} \tag{4.33}$$

(i) Teilchenzahldichte: $\chi^5 = 1$

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t} n + \underline{\nabla}_q \cdot \underline{j} = 0 \\ \text{mit } \underline{j} = n\, \underline{u} = \langle \tfrac{\underline{p}}{m} \rangle \end{gathered}} \tag{4.34}$$

... Kont.gl

Dichte der Erhaltungsgröße — Geschw.

(ii) Impulserhaltung: $\chi^i = p_i \quad i = 1,2,3 \quad \xrightarrow[(4.33)]{(4.32)}$

$$m\frac{\partial}{\partial t} j^i + \frac{1}{m}\nabla_j \underbrace{\langle p_i\, p_j\rangle}_{} = \underbrace{n F_i}_{} \qquad \text{mit } \nabla_i = (\nabla_q)_i$$

weil $F_j \langle \nabla_{p_j} p_i\rangle = \delta_{ij} F_j \langle 1\rangle = n F_i$

$$m^2 \langle (\underline{u}+\underline{c})_i (\underline{u}+\underline{c})_j\rangle \underset{\langle c_i\rangle = 0}{=} m^2 n\, u_i u_j + m^2 \langle c_i c_j\rangle$$

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{m\frac{\partial}{\partial t} j_i}_{\text{Impulsdichte}} + \nabla_j \underbrace{(\underbrace{mn\, u_i u_j}_{m j_i} - T_{ij})}_{\text{Impulsstromdichte}} = n F_i} \qquad (4.35)$$

$mn\, u_i u_j$ ... konvektiver Anteil = Impulsdichte × Geschw.

$T_{ij} = -m\langle c_i c_j\rangle$ ... Spannungstensor (= − Drucktensor)

$n F_i$ ... Volumenkraftdichte äußerer Kräfte

Umschreibung: mit (4.34)

$$m\frac{\partial}{\partial t} n u_i + \nabla_j (mn\, u_i u_j)$$

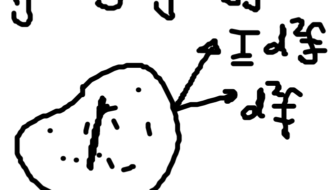
$$= mn\frac{\partial}{\partial t} u_i + \underbrace{m u_i \frac{\partial}{\partial t} n + m u_i \nabla_j (n u_j)}_{m u_i \left(\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_j (n u_j)\right) \overset{(4.34)}{=} 0} + mn\, u_j \nabla_j u_i$$

$$\boxed{mn\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}_q\right) u_i = \nabla_j T_{ij} + n F_i} \qquad (4.36)$$

Massedichte — konvektive — totale / materielle Zeitableitung

Oberflächenkräfte: $\int d^3q\, \nabla_j T_{ij} \overset{\text{Gauß}}{=} \int T_{ij}\, d^2 f_j$!

$$\frac{d}{dt} u_i(q,t) = \frac{\partial}{\partial t} u_i + \underbrace{\dot{q}_j}_{u_j} \nabla_j u_i$$



z.B.: Druck- / Reibungskräfte

lokale Kräfte!!
innere

(4.36) ≅ Newtonsche Grundgleichung:

linke Seite: Beschleunigung eines Volelements mit Geschw $\underline{u}$

rechte Seite: Oberflächen + äußere Kräfte auf Vol.element

(iii) Energieerhaltung: $\chi^5 = \frac{p^2}{2m}$

$$(1)\quad \frac{1}{m}\langle p_i \chi^5\rangle = \left\langle (u_i + c_i)\frac{p^2}{2m}\right\rangle$$

$$= u_i \left\langle \frac{p^2}{2m}\right\rangle + \frac{m}{2}\langle c_i \overbrace{(u_j + c_j)^2}^{u_j^2 + 2u_jc_j + c_j^2}\rangle$$

$$\overset{(4.32)}{\underset{\langle c_i\rangle}{=}} n u_i\left(\frac{m}{2}u^2 + e\right) + \underbrace{m\, u_j \langle c_i c_j\rangle}_{-u_j T_{ij}} + \left\langle c_i \frac{m}{2} c_j^2\right\rangle$$

$$(2)\quad \left\langle \nabla_p \frac{p^2}{2m}\right\rangle = \left\langle \frac{p}{m}\right\rangle = j$$

$$\xrightarrow[\text{in } (4.33)]{\text{mit } (1)(2)} \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[n\left(\frac{m}{2}u^2 + e\right)\right] + \nabla_i \underbrace{\left[\underbrace{n u_i\left(\frac{m}{2}\underline{u}^2 + e\right)}_{\text{konvektiver Anteil}} \underbrace{- T_{ij} u_j}_{\text{innere Kräfte}} + \underbrace{q_i}_{\text{Wärmestrom}}\right]}_{\text{Energiestromdichte}} = \underbrace{\underline{j}\cdot\underline{F}}_{\text{Leistung der äußeren Kräfte}}} \quad (4.37)$$

$$\text{mit } \boxed{q_i = \left\langle c_i \frac{m}{2} c_j^2\right\rangle} \ \dots \text{Wärmestromdichte} \quad (4.38)$$

Umformung mit Hilfe von (4.34) & (4.36):

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{n\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\right)e}_{\substack{\text{zeitliche Änderung}\\ \text{der inneren Energie}\\ \text{für bewegtes Vol.}\\ \text{dement}}} = \underbrace{-\underline{\nabla}\cdot \underline{q}}_{\text{Wärmefluß}} + \underbrace{T_{ij}\nabla_i u_j}_{\text{mechan. Leistung der inneren Kräfte}}} \quad (4.38)$$

$$[\text{TD:}\quad dU = đQ + dW]$$

4.4.2 Hydrodynamische Gleichungen ohne Dissipation

- Materialgesetze für Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ und Wärmestromdichte $\underline{q}$
  $\equiv$ explizite Berechnung mit $f(\underline{r}, \underline{p}, t)$

Annahme: lokales GG

$$f_0(q, p, t) = \frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp\Big[-\underbrace{\frac{(p-mu)^2}{2m k_B T}}\Big] \quad (4.29)$$

$$\text{mit } n, T, \underline{u} = n, T, \underline{u}(q, t) \qquad \xrightarrow{\underline{c} = \frac{p}{m} - u} \Big[-\frac{c^2}{2k_BT/m}\Big]$$

Bemerkung: $\frac{\partial f_0}{\partial t}\Big|_{\text{Stoß}} = 0$, aber $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} p \cdot \underline{\nabla}_q + \underline{F} \cdot \underline{\nabla}_p\right) f_0 \neq 0$!!

· Berechnung von Mittelwerten: (4.39)

$$\boxed{\langle c_i c_j \rangle_0 \overset{(4.29)}{\underset{c_i = \frac{p_i}{m} - u_i}{=}} n \frac{k_B T}{m} \delta_{ij}}$$

$$T_{ij}^0 = -m \langle c_i c_j \rangle_0 = -P \delta_{ij}$$

mit $P = n k_B T$

... ideale Gasgleichung

$$q_i^0 = \langle c_i \tfrac{m}{2} c_j^2 \rangle_0 = 0$$

keine Dissipation!

$$ne = \frac{m}{2} \langle \underline{c}^2 \rangle_0 = \frac{3}{2} n k_B T$$

... kalorische Zustandsgleichung

(4.40)

$\Longrightarrow$ explizite Erhaltungssätze: $\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}_q}$ (4.41)

(4.34) $\longrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t} n = -\nabla_q \cdot (n\underline{u})$ (4.42)

(4.36) $\xrightarrow{\nabla_j T_{ij} = -\nabla_i P}$ $mn \frac{d}{dt} \underline{u} = -\underline{\nabla}_q P + n \underline{F}$, $P = n k_B T$ (4.43)

(4.38) $\left[n \frac{d}{dt} e = -\nabla_q + T_{ij} \nabla_i u_j\right]$ $\xrightarrow{T_{ij} \nabla_i u_j = -P \underline{\nabla}_q \underline{u}}$ $\frac{d}{dt} T = -\frac{2}{3} T \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$ (4.44)

· Bemerkung:

(1) Gl. (4.42) – (4.44) invariant unter Zeitumkehr ($t \to -t$, $\underline{u} \to -\underline{u}$)

$\longrightarrow$ enthalten keine Dissipation!

$\longrightarrow$ Störungen des GG-Zustandes relaxieren nicht gegen Null

(2) Verdeutlichung:

$$(4.42) \longrightarrow \frac{d}{dt} n = -n \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} \longrightarrow \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} = -\frac{1}{n}\frac{d}{dt} n = -\frac{d}{dt} \ln n$$

$$\xrightarrow{\text{in } (4.44)} \frac{d}{dt} T = \frac{2}{3} T \frac{d}{dt} \ln n \rightarrow \frac{3}{2} \underbrace{\frac{1}{T}\frac{d}{dt} T}_{\frac{d}{dt} \ln T} = \frac{d}{dt} \ln n$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\ln\left(n T^{-3/2}\right)}_{\sim \text{ lokale Entropie des Gases (o.B.)}} = 0 \,!$$

ändert sich nicht!

(3) (4.43) $\equiv$ Eulersche Glн.

Behandlung von Strömungen kompressibler Gase

- Modenanalyse von (4.42) – (4.44): s. Übungen

(i) Setze:

$$n = \bar{n} + \delta n(\underline{q}, t)$$

$$T = \bar{T} + \delta T(\underline{q}, t)$$

$$\underline{u} = \underbrace{0}_{\substack{\text{homogener} \\ \text{GG-Zustand}}} + \underbrace{\underline{u}(\underline{q}, t)}_{\text{kleine Abweichung}}$$

(ii) linearisiere (4.42) – (4.44) in δn, δT, $\underline{u}$

(iii) Löse durch Modenansatz:

$$\begin{pmatrix} \delta n \\ \delta T \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta n(\underline{k}, \omega) \\ \delta T(\underline{k}, \omega) \\ \underline{u}(\underline{k}, \omega) \end{pmatrix} e^{-i\omega t + \underline{k}\cdot \underline{q}}$$

Det[Koeffizientenmatrix] $= 0 \longrightarrow$ Dispersionsrelationen: $\omega = \omega(k)$

(iv) Ergebnisse:

2 statische Scher moden: $\omega_{1/2} = 0$ (*)

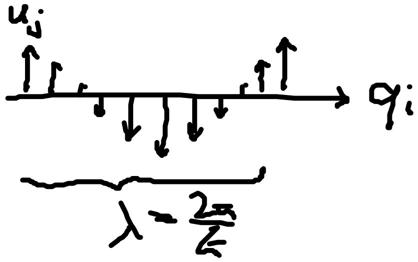
1 statische Temp/Dichtemode: $\omega_3 = 0$ (**)

2 Schallwellen: $\omega_{4/5} = \pm c_s |\underline{k}|$

mit $c_s = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{k_B \bar{T}}{m}}$ ... Schallgeschw.

<u>keine</u> Dämpfung

(*)



(**) $\underline{\nabla}\,\delta T + \frac{\bar{T}}{\bar{n}}\underline{\nabla}\,\delta n = 0$!