

## Erhaltungssätze:

Teilanzahl:  $\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_q \cdot j = 0$  (4.34)

Impuls:  $m n \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla_q \right) u_i = \nabla_j T_{ij} + n F_i$  (4.36)

Energie:  $n \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla_q \right) e = -\nabla \cdot q + T_{ij} \nabla_i u_j$  (4.38)

Hydrodynamik ohne Dissipation: mit  $f_0$

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -\nabla_q \cdot (n u) \quad (4.42)$$

$$m n \frac{d}{dt} u = -\nabla_q P + n F, \quad P = n k_B T \quad (4.43)$$

$$\frac{d}{dt} T = -\frac{2}{3} T \nabla_q \cdot u \quad (4.44)$$

## 4.4.3 Hydrodynamische Gleichungen mit Dissipation

• Boltzmann-Gl.:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{stap}} \\ \text{mit } \mathcal{L}[f] &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + F \cdot \nabla_p \right] \\ \left( \frac{p}{m} = u + \varepsilon \right) &= \left[ \frac{d}{dt} + \varepsilon \cdot \nabla_q + \frac{1}{m} F \cdot \nabla_\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

• Problem:  $\left. \frac{df_0}{dt} \right|_{\text{stap}} = 0$ , aber  $\mathcal{L}[f_0] \neq 0$ ,  $f_0$  s. (4.29)  
... lokales GG

• Näherungslösung: "1. Ordnung"

(i)  $f = f_0 (1 + \Delta)$  mit  $\Delta \ll 1$

(ii) Relaxationszeit nähert sich für Stoßsystem.

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{steps}} = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$$

in Gl. (4.45):  $\mathcal{L}[f_0 + f_0 \Delta] = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$  &  $\mathcal{L}[f] \approx \mathcal{L}[f_0]$

$$\rightarrow \boxed{\Delta = -\tau \frac{1}{f_0} \mathcal{L}[f_0] = -\tau \mathcal{L}[\ln f_0]} \quad (4.46)$$

berechne  $\mathcal{L}[\ln f_0]$  & Annahme:  $n(q, t)$ ,  $u(q, t)$ ,  $T(q, t)$

in  $f_0$  lösen (4.42) - (4.44)

o.B.  $\rightarrow$

$$\boxed{f = f_0 (1 + \Delta)} \quad (4.47)$$

$$\text{mit } \Delta = -\tau \frac{m}{k_B T} \left( c_i c_j - \frac{\delta_{ij}}{3} c^2 \right) D_{ij} - \tau \left( \frac{m c^2}{2 k_B T} - \frac{5}{2} \right) \frac{c_i}{T} \nabla_i T$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \dots \text{Deformationsrate}$$

• Mittelwerte:

$$\boxed{\langle A \rangle = \int d^3 p A f_0 (1 + \Delta) = \langle A (1 + \Delta) \rangle_0} \quad (4.48)$$

• Spannungstensor „1. Ordnung“:

$$T_{ij} \stackrel{(4.35)}{=} -m \langle c_i c_j \rangle \stackrel{(4.47)}{=} -m \left[ \langle c_i c_j \rangle_0 - \frac{\tau m}{k_B T} \langle c_i c_j \left( c_k c_l - \frac{\delta_{kl}}{3} c^2 \right) \rangle_0 D_{kl} \right]$$

o.B.  $\rightarrow$

$$\langle c_i c_j \rangle_0 = n \frac{k_B T}{m} \delta_{ij}$$

$$\langle c_i c_j c_k c_l \rangle_0 = n \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 \times$$

$$(\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\boxed{T_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\underbrace{\eta \left( D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_{kk} \right)}_{T'_{ij} \dots \text{viskoser Spannungstensor}} \quad (4.49)$$

mit  $P = n k_B T \dots$  Druck  
 $\eta = n k_B T \tau$

Deutung: (i) Scherströmung:

$$\cdot D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_{kk} \neq 0 \rightarrow T'_{ij}$$

• nicht zeitun- oder invariante:

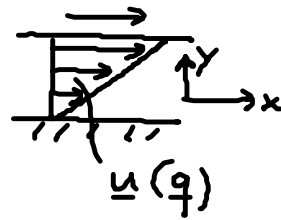
$$T'(-D_{ij}) = -T'(D_{ij})$$

→ Dissipation

→ Relaxation von Schernode ins GG

$$\cdot \text{Sp } \underline{D} = D_{ii} = \text{div } \underline{u} \dots \text{Spur von } \underline{D}$$

$$\text{also: } D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \text{div } \underline{u} = 0 \quad \text{für } \underline{D} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \text{div } \underline{u}!! \text{ keine Kompression}$$



(ii) keine extra Volumenviskosität:

$$\text{kein Beitrag: } T'_{ij} \sim D_{ii} = \text{div } \underline{u}$$

• Wärmestromdichte: 1. Ordnung

$$q_i = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle \stackrel{(4.47)}{=} -\frac{m\tau}{2} \langle (\frac{m\epsilon^2}{24kT} - \frac{5}{2}) c_i c_k \epsilon^2 \rangle \frac{\nabla_k T}{T}$$

o.B. →

$$\boxed{q = -\kappa \nabla_q T} \quad (4.50)$$

mit  $\kappa = \frac{5}{2} n \frac{k_B^2 T}{m} \tau \dots$  thermische Leitfähigkeit

$$q \sim -\nabla_q T \rightarrow q \text{ gleicht } \nabla_q T \text{ aus}$$

→ Relaxation ins GG

$$(4.34) \rightarrow$$

$$(4.35) \frac{\nabla_j T_{ij}}{F_i} = \dots$$

$$(4.38) \frac{-\nabla_q \cdot q}{T_{ij} \nabla_i u_j}$$

$$n\epsilon = \frac{m}{2} \langle \epsilon^2 \rangle = \frac{5}{2} n k_B T$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -\nabla_q \cdot (n \underline{u}) \quad (4.51)$$

$$m n \frac{d}{dt} \underline{u} = -\nabla_q p + \eta \nabla_q^2 \underline{u} + \frac{1}{3} \eta \nabla_q (\nabla_q \cdot \underline{u}) \quad (4.52)$$

$$\frac{d}{dt} T = \underbrace{\frac{2\kappa}{3n k_B} \nabla_q^2 T}_{\text{von } -\nabla_q \cdot q} - \frac{2}{3} T \nabla_q \cdot \underline{u} + \frac{2}{3n k_B} T_{ij}' \nabla_i u_j \quad (4.53)$$

Bem: (1) Gl. (4.52)  $\equiv$  Navier-Stokes-Gl. für kompressible Flüssigkeiten

aber: Viskosität für reine Kompression:  $\eta_k + \frac{1}{3}\eta$  statt  $\frac{1}{3}\eta$ !

(2) Gl. (4.53):  $\underline{f} = \nabla_i u_j = 0 \rightarrow$  reine Diff. Gl.  $\underline{f} = T$

$T_{ij}' \nabla_i u_j \dots$  nichtlineare Term in  $\underline{u}$ !

• Modenanalyse: (wie in Kap. 4.4.2)

2 diffusive Schermoden:

Dispersionsrelation:  $\omega_{1/2} = -i \frac{\eta}{m\bar{n}} k^2$  mittlere Dichte

Dämpfrate  $-i\omega = \frac{\eta}{m\bar{n}} k^2 \rightarrow 0 \quad \underline{f} = k \rightarrow 0$

$\hat{=} \text{hydrodynamische Moden}$

1 diffusive „Temperaturmode“  $\omega_3$

2 gedämpfte Schallwellen

$$\omega_{4/5} = \pm c_s k - i k^2 \left( \frac{2\eta}{3m\bar{n}} + \frac{2\kappa}{15k_B\bar{n}} \right) + O(\tau^2)$$

## 5. Statistische Ensemble

• Ziel:

Zugang zu makroskop. Eigenschaften von Vielteilchen-Systemen durch Mittelung über viele mikroskop. Realisationen

insbesond.: S, U, F, H, G...

Hydrodynam. Potentiale

• Weg: Wähle Ensemble von Mikrostate da durch Festlegung von Randbedingungen  $\rightarrow$  Charakterisierung die Makrostate

• Beachte:

Im Hydrodynam. Limes  $N \rightarrow \infty$  sind alle Ensemble äquivalent

## 5.1. Mikrokanonisches Ensemble

• Def: Alle zugängliche Mikrozustände eines abgeschlossenen Systems (also mit Energie  $U = \text{konst}$  und  $V, N, \dots = \text{konstant}$ ) bilden das mikrokanon. Ensemble

• Liouville Theorem:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \{ \rho, H \}$

stationärer Zustand = thermisches GG: mögl. Lsg.:  $\rho_{\text{eq}} = \rho(H=U) = \text{konst}$

→ Postulat gleicher a priori Wahrscheinlichkeit für Mikrozustände  $s$  mit Energie  $U$ :

$$P(s) = \frac{1}{g(U)}$$

mit  $g(U) \dots$  Anzahl aller zugänglichen Mikrozustände mit Energie  $U$  [und  $V, N, \dots$ ]

• Postulat der Boltzmannsche Entropie:

$$S = k_B \ln g(U) \quad (5.2)$$

mit  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \dots$  Boltzmannsche Konstante

• QM:  $i$  indiziert Eigenzustände mit Energie-EW  $E$

• Klass. Mechanik:

$$g(U) = \frac{1}{N!} \int_U^{U+\Delta} \frac{1}{h^{2N}} d\Gamma \quad \text{mit } d\Gamma = \prod_i d^3 q_i d^3 p_i \quad (5.3)$$

Bem: (i)  $h^{2N} \dots$  Phasenraumvolumen / Zustand

aus Dimensionsgründen:  $[h] = \text{J} \cdot \text{s} = \text{Einheit Wirkung}$

Begründung:  $dq_\alpha dp_\alpha \sim h$

(ii):  $N!$ , weil ununterscheidbare Teilchen !!

NB: wichtig, damit  $S$  extensiv

(iii):  $g(U) = \frac{1}{N! h^{2N}} \times$  Phasenraumvolumen von Energieschale  
mit  $U \leq H(q,p) \leq U + \Delta$

$\Delta$  ... Energie immer, "unbedarf" wegen äußere Störungen

• Bsp: ideales Gas:  $H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}$

Volumen  $\Omega(U)$  von  $3N$ -dim. Hyperkugel mit Radius  $U = H$

$$\Omega(U) \stackrel{\text{o.B.}}{\sim} V^N U^{2N/2} \quad (5.4)$$

$$\text{also } g(U) = \frac{1}{h^{2N} N!} [\Omega(U) - \Omega(U-\Delta)] \quad (5.5)$$

$$\text{Berechne: } \frac{\Omega(U-\Delta = xU) \stackrel{(5.4)}{\sim} x^{2N/2}}{\Omega(U)} \times$$

$$\begin{aligned} \text{Zahlenwert: } x &= 0.999999, N = 10^{23} \\ \rightarrow \frac{\Omega(xU)}{\Omega(U)} &= (1-10^{-6})^{2N/2} = e^{2N/2 \ln(1-10^{-6})} \\ &\approx e^{-2N/2 \cdot 10^{-6}} = e^{-10^{-7}} \approx 0!!! \end{aligned}$$

also: Volumen von Hyperkugeln in hochdim. Raum auf dünne Schale mit Radius  $U$  konzentriert

$$\rightarrow \boxed{g(U) = \frac{1}{N! h^{2N}} \Omega(U)}$$