

VII. 3 Plasmawellen (Fortsetzung)

Was bisher geschah:

Klassische einfache Rechnung suggeriert kollektive
Plasmenschwingung mit $\omega_{pl} = \left(\frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} \right)^{1/2}$

Ziel: Lösung über Quantenmechanische Rechnung

Bisher: Bewegungsgl. für Dichte fluktuieren ρ_q
über Heisenberg-Bewegungsgl für $\langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle$:

$$\frac{d}{dt} \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle = \frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle \\ + \frac{i}{\hbar} V_q (\langle a_k^\dagger a_k \rangle - \langle a_{k+q}^\dagger a_{k+q} \rangle) \sum_{k'} \langle a_{k'+q}^\dagger a_{k'} \rangle$$

Mit Ansatz $\langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle(t) = e^{-i(\omega_{k+q} - \omega_k)t} \langle a_{k+q}^\dagger a_k(0) \rangle$

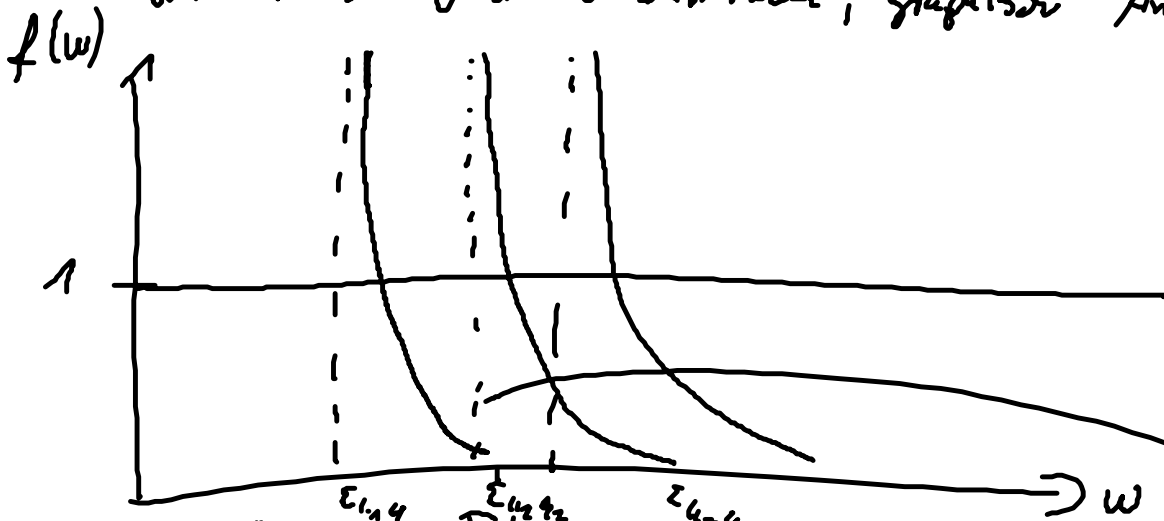
ergab sich die Bestimmungsgl:

$$\left\| 1 = V_q \sum_{k'} \frac{(\epsilon_{k'+q} - \epsilon_{k'})}{\hbar(\omega_{k'+q} - \omega_{k'}) + (\epsilon_{k'+q} - \epsilon_{k'})} \right\| \quad \text{und nun die Fortsetzung:}$$

$$1 = \sum_k \frac{f_k}{\hbar} \left(\frac{1}{\omega + (\epsilon_k - \epsilon_{k+q})/\hbar} - \frac{1}{\omega + (\epsilon_{k-q} - \epsilon_k)/\hbar} \right)$$

Bestimmungsgl der Plasmofrequenz $f(\omega)$

Wir müssen jetzt ω bestimmen, graphische Ansicht



Zwei Typen von EW

1.) (a) $\omega \approx -\epsilon_{qk} \equiv -\frac{1}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) = -\frac{\hbar^2 k \cdot q}{m} - \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$

für q gegen Null kann jeder ω Wert angenommen.

(b) $\omega \approx -\frac{1}{\hbar} (\epsilon_k - \epsilon_{k-q}) = \frac{\hbar^2 k \cdot q}{m} - \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$ Für beliebig k ist das relevant!

Für jedes ω gibt es k, q Kombination, die Lösung ist!

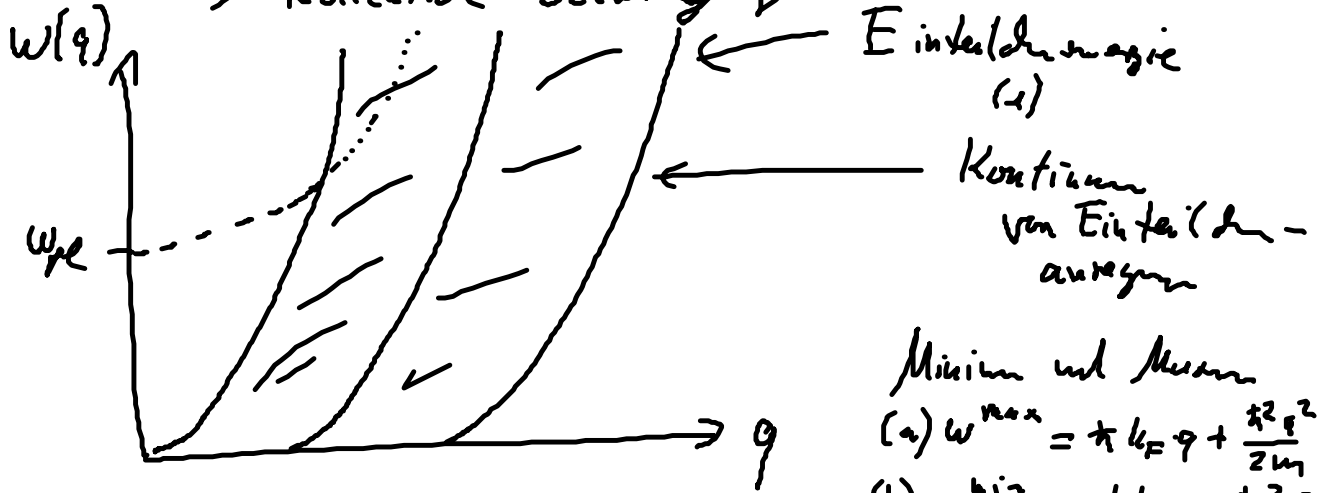
$$(-i \left(\frac{1}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) + i\gamma \right) < \alpha_{k+q}^+ \epsilon_{k+q}(\omega) = \frac{1}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) < \alpha_{k+q}^+ \epsilon_k > + \frac{1}{\hbar} \epsilon_k \dots \dots -$$

Nur im Elektronenraum transportieren!

Hier muss die Summe Null sein! für andere $k \dots$

2.) Numerische Antwort zeigt weiter
 EW bei ω_p Plasmafrequenz

\Rightarrow kollektive Schwingung



Man kann zeigen das $\omega_{pe}(q \rightarrow 0) = \omega_{pe} (1 + \alpha q^2)$
 und zwar (klein q !)

$$f_{k+q} - f_k = f_k + q \cdot \nabla f_k - f_k = -q \cdot \nabla f_k$$

Abw

$$1 = V_q \sum_k \frac{-q \cdot \nabla f_k}{\hbar(\omega + i\eta) - \hbar^2 \frac{q \cdot k}{m}} = V_q \sum_k q \cdot (\nabla f_k) \left(1 + q \cdot k \frac{\hbar^2}{m \omega \hbar} \right) \frac{1}{\hbar \omega}$$

↑
 partielle Integration Taylorentwicklung

$$= V_q \sum_k \underbrace{f_k}_{n_0 \cdot V} \quad q \cdot q \frac{1}{m \omega^2} = \frac{V_q}{m \omega^2} q^2 n_0$$

$$1 = \frac{e^2}{q^2 \sqrt{\epsilon_0}} \frac{q^2}{m \omega^2} n_0 \cdot V$$

$$\omega^2 = \frac{e^2}{q^2 \epsilon_0} \frac{q^2}{m} n_0 = \omega_{pe}^2$$

$$\omega_{pe} = \left(\frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$w(q) = w_{pe} (1 + \alpha q^2)$ für kollektive Anregungen.

Zusammenfassung und Hinweis Plasm

- 1) Im Elektronengas gibt es sowohl Anregungen von Elektronenpaaren in Kristallen als auch kollektive Anregungen (also Plasmen)
- 2) Es gibt viele Arten von Plasmen, longitudinal, transversal, Oberflächenplasmen (Wichtig für Nanostuktur)

Das Plasmakonzept (longitudinal vs. transversal) wurde von Bohm, Nazium und Pines in 50er Jahren eingeführt.

Es gibt auch Plasmen Erzeugen und Vernichten für Plasmen.

- (3) Die kollektiven Plasmanerregungen zerfallen sehr schnell, da viele Einzelanregungen existieren.

Ergeben durch kollektive Anregungen und Wechselwirkungen ein modifiziertes Coulombs Potential?

VIII.4 Plasmascreening

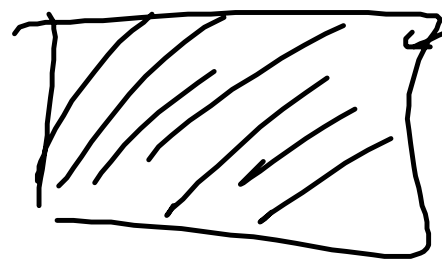
Ziel Beschreibung des Coulombs WW nur zwischen Testteilchen

drei von Gleichgewicht abweichen.

Einfluß der Verluste durch ein effektives Coulomb Potential!

Erwartung

Elektronengas

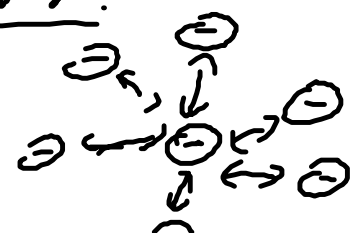


Ladung verschiebung kann auch aus anderen
Dauer

(Hierzulänge El in Band oder Einström
von Se)

Unser Ziel ist es, zu wissen, wie reagiert das Elektron-System
auf ein Testladung (externes Elektron oder Loch!)

Erwartung:



Elektron, stößt andere
Elektronen ab =>



Scheint Elektron

Ziel konstruieren eines effektiven Ham. Op für Testladung
(Dielektrische Funktion, im Prinzip Dispersionsrelation
der longitudinalen Schwingungen)

Dies soll die Form haben:

$$H = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k + \sum_{q, \lambda} V_{k, \lambda, q} a_{k+q}^\dagger a_k$$

Wobei $V_{\text{eff}}(z) = \underbrace{V(z)}_{\text{Teilw. d. } \vec{A}} + \underbrace{V_{\text{ind}}(z)}_{\text{Einfluss der abstrahlenden Elektronen}}$ (#)

Analog zum letzten Abschnitt wird Bewegungsgleichung für $\langle a_{k+q}^\dagger, a_k \rangle$ (wieder mit RPA)

$$\frac{d}{dt} \langle a_{k+q}^\dagger, a_k \rangle = \frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) \langle a_{k+q}^\dagger, a_k \rangle + \frac{i}{\hbar} V_{q, \text{eff}} (f_k - f_{k+q})$$

Auflösen

$$\langle a_{k+q}^\dagger, a_k \rangle = \frac{i}{\hbar} \frac{V_{q, \text{eff}} (f_k - f_{k+q})}{(-i(\omega + i\eta) - \frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k))} \quad (\times)$$

Aus der Poisson-Gleichung erhält man, da in der Tat Potential des Plasmas

$$-\Delta V_{\text{ind}}(z) = \frac{e \rho(z)}{\epsilon_0} \quad \left(\text{Erinn. an das Coulomb-Potential} \right)$$

kann es $-\Delta V_{\text{eff}}(z) = \frac{\delta(z-z')}{\epsilon_0}$

$$-\Delta V_{\text{ind}}(q) = + \frac{e}{\epsilon_0 q^2} \rho_q \stackrel{\text{P}}{\approx} \left(\frac{e^2}{\epsilon_0 V q^2} \right) \cdot \sum_k \frac{i}{\hbar} \frac{V_{q, \text{eff}} (f_k - f_{k+q})}{(-i(\omega + i\eta) - \frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k))}$$

← V_q

$$\rho_q = \frac{1}{V} \sum_k \langle a_{k+q}^\dagger, a_k \rangle$$

Nun in FT von # einsetzen

$$V_{\text{eff}, q} = V_q + V_{\text{ind}, q} = V_q \left(1 + V_{q, \text{eff}} \sum_k \frac{i}{\hbar} \frac{(f_k - f_{k+q})}{(-i(\omega + i\eta) - \frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k))} \right)$$

Nach $V_{ell, q}$ auflösen

$$V_{ell, q} \left(1 - V_q \sum_k \frac{\tilde{\Gamma}}{\tilde{\omega}} \frac{(f_{k+q} - f_k)}{(-i(\omega + i\eta) - \tilde{\Gamma}(z_{k+q} - z_k))} \right) = V_q$$

$$\Rightarrow V_{ell, q} = \frac{V_q}{\left(1 - V_q \sum_k \frac{\tilde{\Gamma}}{\tilde{\omega}} \frac{(f_{k+q} - f_k)}{(-i(\omega + i\eta) - \tilde{\Gamma}(z_{k+q} - z_k))} \right)}$$

$$V_{gl} \frac{V_q}{\mathcal{E}(q, \omega)} =: V_{ell, q}$$

so folgt daraus die Lindberdgleichung

$$\left\| \left\| \mathcal{E}(q, \omega) = 1 - V_q \sum_k \frac{(z_{k+q} - z_k)}{\tilde{\omega} (-i(\omega + i\eta) + z_{k+q} - z_k)} \right\| \right\|$$

Wie vorheri ergeben sich $\text{Re}(\mathcal{E}(q, \omega)) = 0$

die Mode der longitudinalen Plasm.

(Die Plasmen sind im Prinzip auch etwas wie die Antwort des Systems auf eine externe Störung, durch kleine Fluktuationen)

Wir wollen dass Summe für $\omega \rightarrow 0$ aus (statische Linien)

$$\mathcal{E}(q, 0) = 1 - V_q \sum_k \frac{z_{k+q} - z_k}{z_{k+q} - z_k}$$

$$\text{Für klein } q \text{ von } z_{k+q} - z_k = \frac{\hbar^2}{m} k \cdot q$$

$$\text{und } f_{k+q} - f_k = q \cdot \nabla f_k$$

Wobei:

$$q \cdot \nabla_k f_k = - \frac{\partial f_k}{\partial \mu} \quad q \cdot \nabla_k z_k = - \frac{\hbar^2}{m} q \cdot k \frac{\partial f_k}{\partial \mu}$$

↑
parabolisches
Bz

Fermi-Dirac Verteilung

$$f_k = \frac{1}{1 + e^{(z_k - \mu)/\beta}}$$

$$\mathcal{E}(q, 0) = 1 + \frac{e^2}{20 q^2 V} \sum_k \frac{\frac{\hbar^2}{m} q \cdot k \frac{\partial f_k}{\partial \mu}}{\frac{\hbar^2}{m} k \cdot q} =$$

$$= 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon^2} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \sum_k \epsilon_k \right)}_{n_0}$$

$$= 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon^2} \frac{\partial n}{\partial \mu} = 1 + \frac{\chi^2}{\epsilon^2}$$

mit $\chi = \sqrt{\frac{e^2}{\epsilon_0} \frac{\partial n}{\partial \mu}}$ // 3D Abschirmungswinkel

$$\| V_{eff,1q} = \frac{e^2}{\epsilon_0 V} \frac{1}{q^2 + \chi^2} = \frac{V_\epsilon}{\epsilon(q,0)} \| \text{Abschirmungscharakteristika}$$

Wird in der Regel für Nichtgleichgewichtszustände der Elektronen und Löcher verwendet!