

VII.3 Plasma (Fortsetzung)

Was bisher geschah:

Klassische einfache Rechnung suggeriert kollektive
Plasmaschwingung mit $\omega_{pe} = \left(\frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} \right)^{1/2}$

Ziel: Lösung über Quantenmechanische Rechnung

Bisher: Bewegungsgl. für Dichte fluktuieren ρ_q
über Heisenberg-Bewegungsgl für a_{k+q}^\dagger, a_k :

$$\frac{d}{dt} \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle = \frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle + \frac{i}{\hbar} V_q (\langle a_k^\dagger a_0 \rangle - \langle a_{k+q}^\dagger a_{k+q} \rangle) \sum_k \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle$$

Mit Ansatz $\langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle(t) = e^{-i(\epsilon_{k+q} - \epsilon_k)t} \langle a_{k+q}^\dagger a_k(0) \rangle$

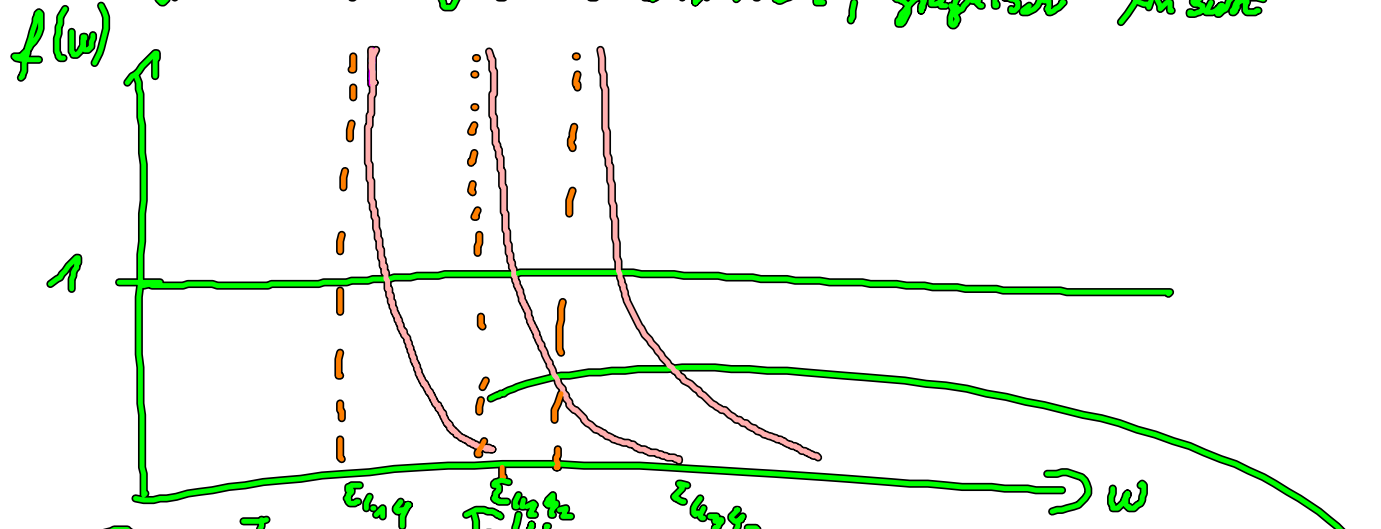
ergab sich die Bestimmungsgl:

$$\| 1 = V_q \sum_k \frac{(\epsilon_{k+q} - \epsilon_k)}{\hbar(\epsilon_{k+q}) + (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k)} \| \quad \text{und nun die Fortsetzung:}$$

$$1 = \sum_k \frac{f_k}{\omega} \left(\frac{1}{\omega + (\epsilon_k - \epsilon_{k+1})/\hbar} - \frac{1}{\omega + (\epsilon_{k+1} - \epsilon_k)/\hbar} \right)$$

Bestimmungsgleich der Plasmafrequenz $f(\omega)$

Wir müssen jetzt ω bestimmen, graphische Ansicht



Zwei Typen von EW

1.) (a) $\omega \approx -\epsilon_{qk} \equiv -\frac{1}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) = -\frac{\hbar^2}{m} k \cdot q - \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$

für q gegen Null kann jeder ω Wert angenommen.

(b) $\omega \approx -\frac{1}{\hbar} (\epsilon_k - \epsilon_{k-q}) = \frac{\hbar^2 k \cdot q}{m} - \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$ Für beliebig k ist das Result!

Für jedes ω gibt es k, q Kombinationen, die Lösung ist!

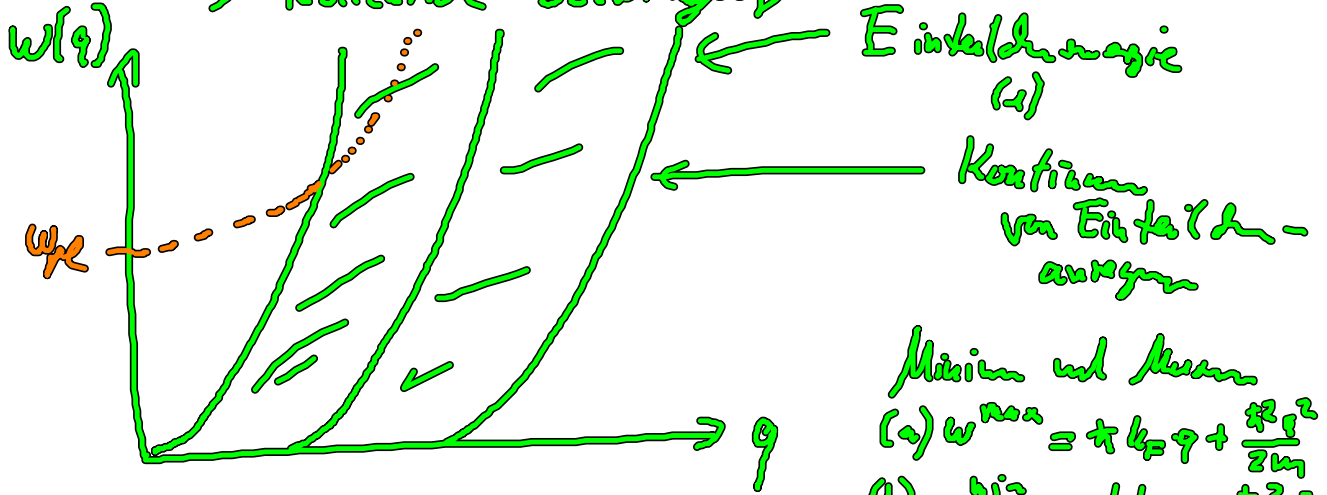
$$(-i \left(\frac{1}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) + i\gamma \right) < \alpha_{k+q}^+ \omega) < \alpha_{k+q}^+ \omega = \frac{1}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) < \alpha_{k+q}^+ \epsilon_k > + \frac{1}{\hbar} \epsilon_k \dots$$

Nur ein Elektronenpaar freigesetzt!

Hier muss die Summe Null sein! für andere $k \dots$

2.) Numerische Antwort zeigt weiter
 EW bei ω_p Plasmafrequenz

\Rightarrow kollektive Schwingung



Man kann zeigen das $\omega_{pe}(q \rightarrow 0) = \omega_{pe}(1 + \alpha q^2)$
 und zwar (klein q !)

$$f_{k+q} - f_k = f_k + q \cdot \nabla f_k - f_k = -q \cdot \nabla f_k$$

also

$$1 = V_q \sum_k \frac{-q \cdot \nabla f_k}{\hbar(\omega + i\eta) - \frac{\hbar^2 q \cdot k}{m}} = V_q \sum_k q \cdot (\nabla f_k) \left(1 + q \cdot k \frac{\hbar^2}{m \omega \hbar} \right) \frac{1}{\hbar \omega}$$

partielle Integration \uparrow Taylorreihenentwicklung

$$= V_q \sum_k \underbrace{f_k}_{n_0 \cdot V} \quad q \cdot q \frac{1}{m \omega^2} = \frac{V_q}{m \omega^2} q^2 n_0$$

$$1 = \frac{e^2}{\epsilon^2 V \epsilon_0} \frac{q^2}{m \omega^2} n_0 \cdot V$$

$$\omega^2 = \frac{e^2}{\epsilon^2 \epsilon_0} \frac{q^2}{m} n_0 = \omega_{pe}^2$$

$$\omega_{pe} = \left(\frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$w(q) = w_{pe} (1 + \alpha q^2)$ für kollektive Anregung.

Zusammenfassung und Hinweis Plasm

- 1) Im Elektronengas gibt es sowohl Anregungen von Elektronenpaaren in Kanten als auch kollektive Anregungen (also Plasmen)
- 2) Es gibt viele Arten von Plasmen: longitudinal, transversal, Oberflächenplasmen (Witt; für Nanostäbchen)

Das Plasmakonzept (longitudinal vs. transversal) wurde von Bohm, Pines und Pines in 50er Jahren eingeführt.

Es gibt auch Plasmen Erzeugen und Vermehren für Plasmen.

- (3) Die kollektiven Plasmanerregungen sind sehr schnell, da viele Einzelanregungen existieren.

Ergeben durch kollektive Anregungen und Wechselwirkungen ein modifiziertes Coulomb-Potential?

VIII.4 Plasmascreening

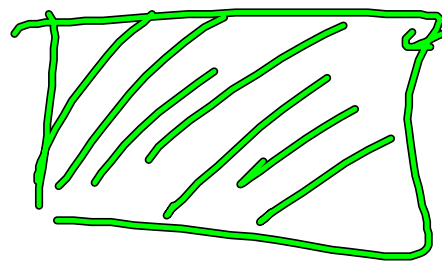
Ziel Beschreibung des Coulomb WW nur zwischen Zuständen

die von Gleichgewicht abweichen.

Einfluss der Verteilung durch ein offenes Gitterpotential:

Erwartung

Elektronen

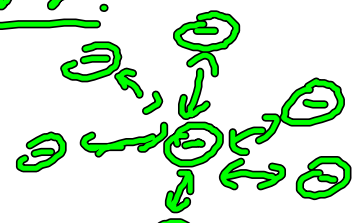


Ladungsmenge kann auch aus anderen
Ordnung

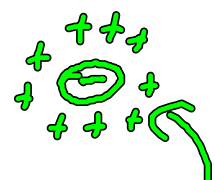
(Hierzulage El in Band oder Einström
von Se)

Unser Ziel ist es, zu wissen, wie reagiert das Elektron-System
auf ein Testladung (externes Elektron oder Loch!)

Erwartung:



Elektron, stößt an
Elektron oder \Rightarrow



Schirmt Elektron

Ziel Konstruieren eines effektiven Ham. Op für Testladung
(Dielektrische Funktionen im Prinzip Dispersionsrelation
der longitudinalen Schwingungen)

Dies soll die Form haben:

$$H = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k + \sum_{k, l} V_{kl} q_k a_{k+l}^\dagger a_l$$

Wobei: $V_{\text{eff}}(z) = \underbrace{V(z)}_{\text{Testladung}} + \underbrace{V_{\text{ind}}(z)}_{\text{Einfluss der umschlossenen Elektroden}}$ (#)

Analogy zum letzten Abschnitt wird Bewegung aufgeführt für $\langle a_{k,t_1}^+, a_k \rangle$ (wieder mit RPA)

$$\frac{d}{dt} \langle a_{k,t_1}^+, a_k \rangle = \frac{i}{\hbar} (z_{k,t_1} - \epsilon_k) \langle a_{k,t_1}^+, a_k \rangle + \frac{i}{\hbar} V_{i,\text{eff}}(z_k - z_{k,t_1})$$

Auflösen

$$\langle a_{k,t_1}^+, a_k \rangle = \frac{i}{\hbar} \frac{V_{i,\text{eff}}(z_k - z_{k,t_1})}{(-i\omega_{k,t_1}) - \frac{i}{\hbar}(z_{k,t_1} - \epsilon_k)} \quad (\times)$$

Aus der Poisson-Gleichung erhalten wir, da es sich um Punkte des Platten

$$-\Delta V_{\text{ind}}(z) = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0}$$

(Erinnere an das Coulomb-Potential $k_{\text{Coul}} = -\Delta V_{\text{Coul}}(z) = \frac{\delta(z-z')}{\epsilon_0}$)

$$\Downarrow$$

$$-V_{\text{ind}}(z) = + \frac{q}{\epsilon_0 q^2} \rho_q = \frac{q^2}{\epsilon_0 V q^2} \cdot \sum_k \frac{i}{\hbar} \frac{V_{i,\text{eff}}(z_k - z_{k,t_1})}{(-i\omega_{k,t_1}) - \frac{i}{\hbar}(z_{k,t_1} - \epsilon_k)}$$

Nun in FT von # einsetzen $\rho_q = \frac{A}{V} \langle a_{k,t_1}^+, a_k \rangle$

$$V_{\text{eff},q} = V_q + V_{\text{ind},q} = V_q \left(1 + V_{i,\text{eff}} \sum_k \frac{i}{\hbar} \frac{(z_k - z_{k,t_1})}{(-i\omega_{k,t_1}) - \frac{i}{\hbar}(z_{k,t_1} - \epsilon_k)} \right)$$

Nach $V_{eff, q}$ auflösen

$$V_{eff, q} \left(1 - V_q \sum_k \frac{\tilde{\epsilon}}{\hbar} \frac{(\epsilon_k - \epsilon_{k+q})}{(-i(\omega + i\eta) - \tilde{\epsilon}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_k))} \right) = V_q$$

$$\Rightarrow V_{eff, q} = \frac{V_q}{\left(1 - V_q \sum_k \frac{\tilde{\epsilon}}{\hbar} \frac{(\epsilon_k - \epsilon_{k+q})}{(-i(\omega + i\eta) - \tilde{\epsilon}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_k))} \right)}$$

V_{eff}

$$\frac{V_q}{\mathcal{E}(q, \omega)} =: V_{eff, q}$$

so folgt daraus die Lindhardfunktion

$$\mathcal{E}(q, \omega) = 1 - V_q \sum_k \frac{(\epsilon_{k+q} - \epsilon_k)}{\hbar \tilde{\epsilon} (i\omega + \eta) + \epsilon_{k+q} - \epsilon_k}$$

Wie vorher ergibt sich $\text{Re}(\mathcal{E}(q, \omega)) = 0$

die Mode der longitudinalen Plasm.

(Die Plasmen sind in Prinzip auf etwas wie die Antwort des Systems auf eine externe Störung, das ist eben Fluktuation)

Wir wollen dass Szenario für $\omega = 0$ aus (statische Linien)

$$\mathcal{E}(q, 0) = 1 - V_q \sum_k \frac{\epsilon_{k+q} - \epsilon_k}{\epsilon_{k+q} - \epsilon_k}$$

$$\text{Für klein } q \text{ von } \epsilon_{k+q} - \epsilon_k = \frac{\hbar^2}{m} k \cdot q$$

$$\text{und } \epsilon_{k+q} - \epsilon_k = q \cdot \nabla \epsilon_k$$

Wobei:

$$q \cdot \nabla_k \epsilon_k = -\frac{\partial \epsilon_k}{\partial \mu} \quad q \cdot \nabla_k \epsilon_k \underset{\text{parabol}}{\approx} -\frac{\hbar^2}{m} q \cdot k \frac{\partial \epsilon_k}{\partial \mu}$$

$$\text{Fermi-Dirac Verteilung}$$

$$f_k = \frac{1}{1 + e^{(\epsilon_k - \mu)/k_B T}}$$

$$\mathcal{E}(q, 0) = 1 + \frac{e^2}{20 q^2 V} \sum_k \frac{\frac{\hbar^2}{m} q \cdot k \frac{\partial \epsilon_k}{\partial \mu}}{\frac{\hbar^2}{m} k \cdot q} =$$

$$= 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon^2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}}_{n_0}$$

$$= 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon^2} \frac{\partial n_0}{\partial \mu} = 1 + \frac{x^2}{q^2}$$

mit $\| x = \sqrt{\frac{e^2}{\epsilon_0}} \frac{\partial n_0}{\partial \mu} \|$ 3D Abschirmungswert

$$\| V_{eff} = \frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon} \frac{1}{q^2 + x^2} = \frac{V_{\epsilon}}{\epsilon(q_0)} \| \text{ Abschirmungscharakteristika}$$

Wird in der Regel für Nichtgleichgewichtszustände der Elektronen und Löcher verwendet!