

IX.3 Exzitonen in Vielteilchensystemen

Im letzten Abschnitt haben wir von den Exzitonen
sehr genau gesprochen. Es gibt aber ein Problem!

Wir haben zugeführt der Form:

$$e_{1k_1}^+ h_{2k_2}^+ | \varphi_0 \rangle \text{ betrachtet.}$$

Also wir haben implizit angenommen, dass es nur ein
Elektron-Loch Paar im System gibt.

Sonst kein weiteres Abweichen vom leeren Leitungsband
und mit Elektronen gefüllten Valenzband betrachten.

Situationen, wo dies nicht gilt:

- 1) Optoelektronische Bauelemente, die elektronen oder optisch
gepumpt werden. Freie beweglichen Ladungsträger sind
im Valenz- (Löcher) oder im Leitungsband (Elektronen)
z.B. Bei Laser gibt es Besetzungsinversion.
- 2) Optisch Exzitonen: hohe Intensität (nicht lineare Optik)
erzeugen signifikante Ladungsträger in Valenz- und
Leitungsband. Dann ist das Thema aus dem letzten Abschnitt
nicht mehr gültig!
- 3) Dotierte Systeme haben von vornherein Ladungsträger im
Valenz- und Leitungsband.

Gesucht Theorien für Vielteilcheneffekte! \Rightarrow Wieder Korrelationsaspekte,
wie bei Plasmen!

Formulierung mit der Größe $\langle a_{c,k}^+ a_{v,k} \rangle$, wie bei der Absorption
+ (ca. low): $H_c = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,k \\ v,k'}} \sum_{\substack{c,k \\ v,k'}} U_{cv} a_{c,k}^+ a_{v,k}^+ a_{v,k} a_{c,k}$

$$\partial_t \underbrace{\langle a_{c,k}^+ a_{v,k} \rangle}_{\text{Elektron-Loch pair}} = \frac{i}{\hbar} (\Sigma_{c,v,k} - \Sigma_{v,c,k}) \langle a_{c,k}^+ a_{v,k} \rangle$$

$$+ \frac{i}{\hbar} \text{div} \cdot \underline{E}(k,t) (\langle a_{v,k}^+ a_{v,k} \rangle - \langle a_{c,k}^+ a_{c,k} \rangle)$$

$$- \frac{i}{\hbar} \sum_{k',q \neq 0} V_q [\langle a_{c,k'+q}^+ a_{c,k-q}^+ a_{c,k'} a_{v,k} \rangle$$

$$+ \langle a_{v,k'+q}^+ a_{c,k-q}^+ a_{v,k'} a_{v,k} \rangle$$

$$+ \langle a_{c,k}^+ a_{c,k'-q}^+ a_{c,k'} a_{v,k+q} \rangle + \langle a_{c,k}^+ a_{v,k'-q}^+ a_{v,k'} a_{v,k+q} \rangle]$$

wieder mit Heisenbergbewegungsgleichung.

Die vier Größen entstehen durch Wickelungen über Coulomb mit zwei weiteren Ladungsträgern.

Um die Gleichungen zu lösen wird wieder Hartree-Fock Approximation durchgeführt:

$$2. B: \langle a_{c,k'+q}^+ a_{v,k-q}^+ a_{c,k'} a_{c,k} \rangle \approx \langle a_{c,k'+q}^+ a_{c,k} \rangle \langle a_{v,k-q}^+ a_{c,k'} \rangle$$

$$- \langle a_{c,k'+q}^+ a_{c,k'} \rangle \langle a_{v,k-q}^+ a_{c,k} \rangle$$

Wir nehmen an, dass System semi-räumlich homogen ist (im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt)

$$\langle a_{\lambda_1 k_1}^+ a_{\lambda_2 k_2} \rangle = \delta_{k_1 k_2} \langle a_{\lambda_1 k}^+ a_{\lambda_2 k} \rangle$$

$$\langle a_{c,k'+q}^+ a_{c,k-q}^+ a_{c,k'} a_{v,k} \rangle = \delta_{k'+q, k} \langle a_{c,k'+q}^+ a_{c,k'+q} \rangle \langle a_{c,k}^+ a_{v,k} \rangle$$

$$- \delta_{q,0} \underbrace{\langle a_{c,k'}^+ a_{c,k'} \rangle \langle a_{v,k}^+ a_{c,k} \rangle}_{\text{trifft nicht bei } q \neq 0}$$

Dies ergibt

$$\partial_t \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle = \frac{i}{\hbar} (\Sigma_{c,4} - \Sigma_{v,4}) \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle + \frac{i}{\hbar} \text{div} \cdot \underline{E}(\underline{r}, t) (\langle a_{v,4}^\dagger a_{v,4} \rangle - \langle a_{c,4}^\dagger a_{c,4} \rangle) - \frac{i}{\hbar} \sum_{q \neq 0} V_q (\langle a_{c,4+q}^\dagger a_{c,4+q} \rangle \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle + \langle a_{v,4}^\dagger a_{v,4} \rangle \langle a_{c,4+q}^\dagger a_{v,4+q} \rangle - \langle a_{c,4}^\dagger a_{c,4} \rangle \langle a_{c,4+q}^\dagger a_{v,4+q} \rangle - \langle a_{v,4+q}^\dagger a_{v,4+q} \rangle \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle)$$

1) Terme $\propto \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle$ (Austauschterm)
 Stellen ein Energie shift (Renormierung) dar.
 Im Vergleich zu vorher wird der Shift durch den
 Besetzung im Valenz und Leitungsgebiet.

2) Terme $\propto \langle a_{c,4+q}^\dagger a_{v,4+q} \rangle$
 diese Terme führen zur Bildung der Exzitation.
 Die Terme sind hier von der Besetzungsdifferenz
 abhängig.

$$\partial_t \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle = \frac{i}{\hbar} (\Sigma_{c,4} - \Sigma_{v,4} + \Sigma_{exc,cv}(\underline{k})) \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle + \frac{i}{\hbar} \text{div} \cdot \underline{E}(\underline{r}, t) (\langle a_{v,4}^\dagger a_{v,4} \rangle - \langle a_{c,4}^\dagger a_{c,4} \rangle) - \frac{i}{\hbar} \sum_{q \neq 0} V_q (\langle a_{v,4}^\dagger a_{v,4} \rangle - \langle a_{c,4}^\dagger a_{c,4} \rangle) \langle a_{c,4+q}^\dagger a_{v,4+q} \rangle$$

$$\text{mit } \Sigma_{exc,cv}(\underline{k}) = \sum_{q \neq 0} V_q (\langle a_{v,4+q}^\dagger a_{v,4+q} \rangle - \langle a_{c,4+q}^\dagger a_{c,4+q} \rangle)$$

Für den Fall $\langle a_{v,4}^\dagger a_{v,4} \rangle = 1$ und $\langle a_{c,4}^\dagger a_{c,4} \rangle = 0$

erhalten wir nach Four-Transform die Wannier Gleichung wie
 im letzten Abschnitt! Der Shift entspricht dem dem
 Shift, den wir auch im letzten Abschnitt berechnet haben!

Genauer Analyse

$$-\frac{1}{h} \sum_{q \neq 0} V_q (\langle a_{v,1}^\dagger a_{v,1} \rangle - \langle a_{c,1}^\dagger a_{c,1} \rangle) \langle a_{c,1}^\dagger a_{v,1} \rangle$$

Bei gleicher Besetzung in dem unteren Band
gibt es keine Correlations WW! (Abstimmung)

$$\langle a_{v,1}^\dagger a_{v,1} \rangle \approx \langle a_{c,1}^\dagger a_{c,1} \rangle$$

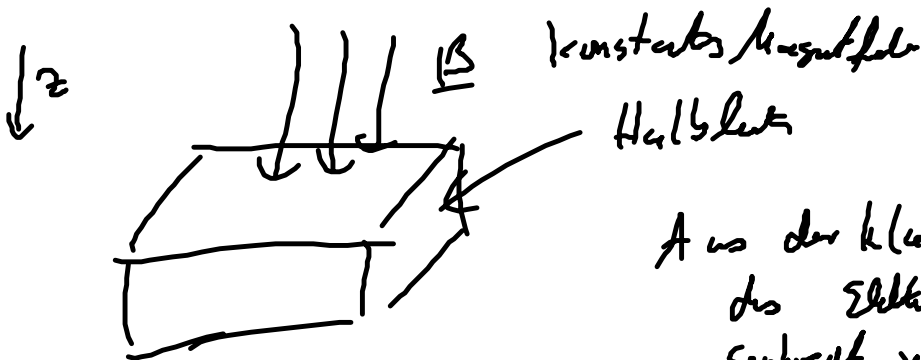
Bei vollständiger Besetzungsinversion kann es zum
Vorzeichenwechsel der Kopplung kommen!

Form von Linienspalten der Exzitation kann sich
bei hoher Besetzung sehr stark ändern!

X. Halbleiter im Magnetfeld (Magnetooptik)

Wir hatten bisher den Fall von Nanostrukturen
in denen durch andere Materialien die Besetzung vorgegeben wurde.
z. B. Quantenwell.

Jetzt sehen wir uns ein anderes Idea an!



Aus der klassischen Physik ist bekannt
das Elektron sich auf Kreisbahnen
senkrecht zum Magnetfeld bewegt.

Nach Lenz'scher Regel sollte sich diese
Bahn ausbilden.

Also Ansatz

$$\underline{B} = B \underline{e}_z$$

Das zugehörige Vektorpotential hat die Form

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{2} \underline{B} \times \underline{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (-2x B_y + 2y B_x)$$

Ansatz in Krpöschl:

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -By \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B+B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

Dies wird jetzt in den Ham. Op eingesetzt

Zur Eriny

$$H = \frac{(p - e \underline{A})^2}{2m}$$

A einsetzen in H in Ortsdarstellung:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\underbrace{\left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{eBy}{\hbar} \right)^2 + \left(i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eBx}{\hbar} \right)^2}_{x-y \text{ Ebene}} + \underbrace{\left(i \frac{\partial}{\partial z} \right)^2}_{z\text{-Richtg}} \right)$$

Wir sehen das Problem ist separierbar.

Im Folgenden betrachten wir nur die x-y Ebene!

Wir führen die charakteristische magnetische Länge ein: $l^2 = \frac{\hbar}{eB}$

Dann hat der x-y Teil die Form:

$$H_{xy} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2l^2} \right)^2 + \left(i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2l^2} \right)^2 \right)$$

Mit Hilfe der charakteristischen Länge skaliert man die Koordinaten

um $\underline{r} = l \underline{\rho}$, damit wird die Gleichung unabhängig von Magnetfeld.

Außerdem führen wir die zyklotron Frequenz ein $\omega_c = \frac{\hbar}{m l^2} = \frac{eB}{m}$

$$H_{xy} = \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[\left(i \frac{\partial}{\partial \rho_x} + \frac{1}{2} \rho_y \right)^2 + \left(i \frac{\partial}{\partial \rho_y} - \frac{1}{2} \rho_x \right)^2 \right]$$

als multiplizieren

$$= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{4} (p_x^2 + p_y^2) + i \frac{\partial}{\partial x} p_y - i \frac{\partial}{\partial y} p_x \right]$$

$$= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left(-\nabla_p^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{\hbar z}{\hbar} \right)$$

Das sieht irgend wie aus wie ein harmonischer Oszillator!

Ziel: Konstruieren von Erzeugern und Vernichtern!

Erst mal Koordinate bis zur Transformation (Koordinate auf komplexe Ebene mappen!)

$$\alpha = \frac{p_x - i p_y}{2}, \quad \beta = \frac{\partial}{\partial p_x} - i \frac{\partial}{\partial p_y}$$

$$\alpha^\dagger = \frac{p_x + i p_y}{2}, \quad \beta^\dagger = -\frac{\partial}{\partial p_x} - i \frac{\partial}{\partial p_y}$$

Bei harmonischen Oszillatoren werden Orts (α) und Impulsoperatoren (β) addiert für Erzeuger und Vernichter

Erzeuger und Vernichter für untere Landau level

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta) \quad \text{und} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^\dagger + \beta^\dagger)$$

Man kann leicht zeigen dass

$$[a, a^\dagger]_- = 1 \quad \text{und} \quad [a, a]_- = [a^\dagger, a^\dagger]_- = 0$$

Ähnlich kann man die obere Landau level

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^\dagger - \beta^\dagger) \quad \text{und} \quad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - \beta)$$

(auch Bosonen)

Man kann jetzt zeigen:

$\| H_{xy} = \hbar \omega_c (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \| \leftarrow$ Die Energie wird durch die intra- und interbanden besetzt.

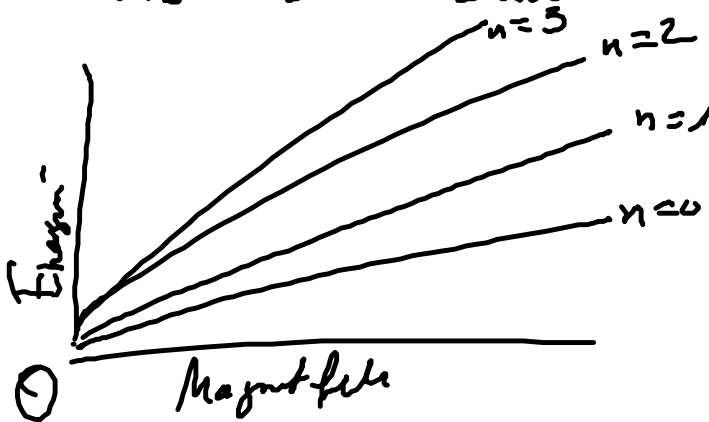
und $\| L_z = a^\dagger a - b^\dagger b \|$

Der Drehimpuls in z-Richtung ist die Differenz zwischen Intra- und Interbanden Leveln.

Ähnlich zum harm. Oszillator existiert

$E_n = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$

Skizze Landau Level



Analog zum harm. Oszillator kann die Eigenzustände geschrieben werden als

$\phi_{nn} = |n\rangle |n'\rangle$ (b ist der harm. Osz mit Energie 0)

Dabei ist klein

$n', n = 0, 1, 2, 3, \dots$

intra-banden \nearrow interbanden

Für den Grundzustand gilt:

$a \phi_{00} = a |0\rangle |0\rangle = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{00} = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b \phi_{00} = 0$$

Setzen wir die Definit der Operatoren a und b ein, so erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für den Grundzustand. Der Lagrange ist:

$$\phi_{00}(x, y) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{4}\right)$$

Wie sieht die Drehimpulskomponente aus:

$$L_z \phi_{n, n'} = (a^+ a - b^+ b) \phi_{n, n'} = (n - n') \phi_{n, n'} = m \phi_{n, n'}$$

$$\phi_{n, n'}(x, y) = \frac{a^{+n} b^{+n'}}{\sqrt{n! n'}} \phi_{00}(x, y) \quad \text{mit } m = n - n'$$

Beachte: Die Landau Level sind 2 -fach entartet, es gibt für ein Landau Level für jeden Wert von m .

Die Landau Level sind die Erklärer für den Quanten-Hall Effekt