

IX.3 Exzitation in Vielteilchensystemen

Im letzten Abschnitt haben wir uns das Exzitation
sehr genau angeschaut. Es gibt aber ein Problem!

Wir haben zusätzlich der Form:

$$e_{1k_1}^+ h_{k_2}^+ | \psi_0 \rangle \text{ betrachtet.}$$

Aber wir haben implizit angenommen, dass es nur ein
Elektron-Loch Paar im System gibt.

Sonst kein weiteres Abweichen von dem Leitungsband
und mit Elektron gefülltes Valenzband behalten.

Situationen, wo dies nicht gilt:

- 1) Optoelektronische Bauelemente, die direkt oder optisch
gepumpt werden. Freie angeregte Ladungsträger sind
im Valenz- (Löcher) oder im Leitungsband (Elektronen)
z.B. Bei Laser gibt Laser gibt es Besetzungsinversion.
- 2) Optisch Exzitierende: hohe Intensität (nicht linear optisch)
erzeugen signifikante Ladungsträger ... in Valenz- und
Leitungsband. Dann ist das Thema aus dem letzten Abschnitt
nicht mehr gültig!
- 3) Dotierte Systeme haben von vornherein Ladungsträger im
Valenz- und Leitungsband.

Gesucht Thema für Vielteilcheneffekte! \Rightarrow Vielteilchenkorrekturen
wie bei Plasmen!

Formalisierung mit der Größe $\langle a_{c,k}^+ a_{v,k} \rangle$, wie bei der Absorption
+ (erlaubt): $H_c = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1, k_2 \\ q=0 \\ l, l'}} v_q a_{l, k_1}^+ a_{l', k_2}^+ a_{l', k} a_{l, k}$

$$\partial_t \langle a_{c_k}^\dagger a_{v_k} \rangle = \frac{i}{\hbar} (\Sigma_{c_k} - \Sigma_{v_k}) \langle a_{c_k}^\dagger a_{v_k} \rangle$$

$$\underbrace{\langle a_{c_k}^\dagger a_{v_k} \rangle}_{\text{Elektron-Loch pair}} + \frac{i}{\hbar} \text{div} \cdot \underline{E}(k, t) (\langle a_{v_k}^\dagger a_{v_k} \rangle - \langle a_{c_k}^\dagger a_{c_k} \rangle)$$

$$- \frac{i}{\hbar} \sum_{k', q \neq 0} V_q [\langle a_{c_{k+q}}^\dagger a_{c_{k-q}}^\dagger a_{c_k}^\dagger a_{v_k} \rangle + \langle a_{v_{k+q}}^\dagger a_{c_{k+q}}^\dagger a_{v_k}^\dagger a_{v_k} \rangle + \langle a_{c_k}^\dagger a_{c_{k+q}}^\dagger a_{c_{k-q}}^\dagger a_{v_{k+q}} \rangle + \langle a_{c_k}^\dagger a_{v_{k+q}}^\dagger a_{v_{k-q}}^\dagger a_{v_k} \rangle]$$

wieder mit Heisenbergbewegungsgleichung.

Die Vierreier Größen entstehen durch Wechselwirkung über Ladung mit zwei weiteren Ladungsträgern.

Um die Gleichungen zu lösen wird wieder Hartree-Fock Approximation durchgeführt:

$$z. B.: \langle a_{c_{k+q}}^\dagger a_{v_{k-q}}^\dagger a_{c_k}^\dagger a_{c_k} \rangle \approx \langle a_{c_{k+q}}^\dagger a_{c_k} \rangle \langle a_{v_{k-q}}^\dagger a_{c_k} \rangle - \langle a_{c_{k+q}}^\dagger a_{c_k} \rangle \langle a_{v_{k-q}}^\dagger a_{v_k} \rangle$$

Wir nehmen an, dass System zwei räumlich homogen ist (in Gegensatz zu vorherigen Abschnitt)

$$\langle a_{\lambda_1 k}^\dagger a_{\lambda_2 k} \rangle = \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \langle a_{\lambda_1 k}^\dagger a_{\lambda_1 k} \rangle$$

$$\langle a_{c_{k+q}}^\dagger a_{c_{k+q}}^\dagger a_{c_k}^\dagger a_{v_k} \rangle = \delta_{k+q, k} \langle a_{c_{k+q}}^\dagger a_{c_{k+q}} \rangle \langle a_{c_k}^\dagger a_{v_k} \rangle - \delta_{q, 0} \langle a_{c_{k+q}}^\dagger a_{c_k} \rangle \langle a_{v_{k+q}}^\dagger a_{v_k} \rangle$$

(nicht nicht bei $q \neq 0$)

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle &= \frac{i}{\hbar} (\Sigma_{c,4} - \Sigma_{v,4}) \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle \\ &+ \frac{i}{\hbar} \text{div} \cdot \underline{E}(\underline{r}, t) (\langle a_{v,4}^\dagger a_{v,4} \rangle - \langle a_{c,4}^\dagger a_{c,4} \rangle) \\ &- \frac{i}{\hbar} \sum_{g \neq 0} V_g (\langle a_{c,4g}^\dagger a_{c,4g} \rangle \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle \\ &\quad + \langle a_{v,4}^\dagger a_{v,4} \rangle \langle a_{c,4g}^\dagger a_{v,4g} \rangle \\ &\quad - \langle a_{c,4}^\dagger a_{c,4} \rangle \langle a_{c,4g}^\dagger a_{v,4g} \rangle \\ &\quad - \langle a_{v,4g}^\dagger a_{v,4g} \rangle \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle) \end{aligned}$$

1) Terme $\langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle$ (Austauschterm)
 stehen im Energieshift (Renormierung) dr.
 Im Vergleich zu vorher wird der Shift durch den
 Besetzung im Valenz und Leitungsgebiet.

2) Terme $\langle a_{c,4g}^\dagger a_{v,4g} \rangle$
 diese Terme führen zur Bildung der Exzitation.
 Die Terme sind hier von der Besetzungsdifferenz
 abhängig.

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle &= \frac{i}{\hbar} (\Sigma_{c,4} - \Sigma_{v,4} + \Sigma_{exc,cv}(\underline{k})) \langle a_{c,4}^\dagger a_{v,4} \rangle \\ &+ \frac{i}{\hbar} \text{div} \cdot \underline{E}(\underline{r}, t) (\langle a_{v,4}^\dagger a_{v,4} \rangle - \langle a_{c,4}^\dagger a_{c,4} \rangle) \\ &- \frac{i}{\hbar} \sum_{g \neq 0} V_g (\langle a_{v,4}^\dagger a_{v,4} \rangle - \langle a_{c,4}^\dagger a_{c,4} \rangle) \langle a_{c,4g}^\dagger a_{v,4g} \rangle \end{aligned}$$

$$\text{mit } \Sigma_{exc,cv}(\underline{k}) = \sum_{g \neq 0} V_g (\langle a_{v,4g}^\dagger a_{v,4g} \rangle - \langle a_{c,4g}^\dagger a_{c,4g} \rangle)$$

Für den Fall $\langle a_{v,4}^\dagger a_{v,4} \rangle \rightarrow 1$ und $\langle a_{c,4}^\dagger a_{c,4} \rangle = 0$

erhalten wir nach Four-Transform die Wannier Gleichung wie
 im letzten Abschnitt! Der Shift entspricht dem dem
 Shift, den wir auch im letzten Abschnitt berechnet haben!

Genauer Analyse

$$-\frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} V_q (\langle a_{q,1} a_{q,1} \rangle - \langle a_{q,2} a_{q,2} \rangle) \langle a_{q,1} a_{q,1} \rangle$$

Bei gleicher Besetzung in den nächsten Band
gibt es keine Correkturen WW! (Abhängig)

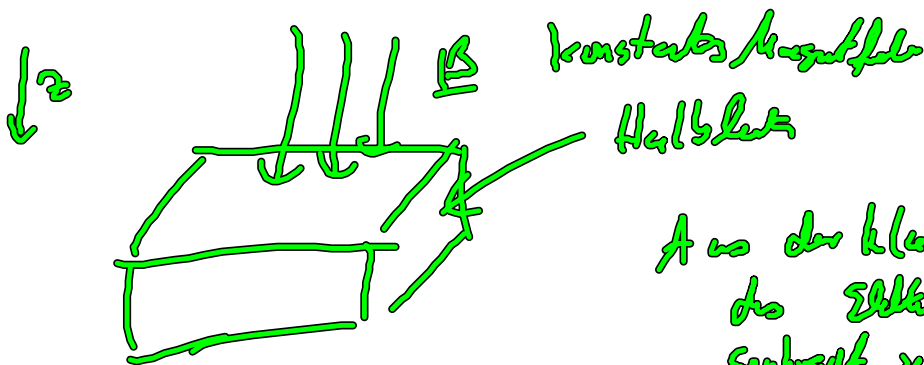
($\langle a_{q,1} a_{q,1} \rangle \approx \langle a_{q,2} a_{q,2} \rangle$)
Bei vollständiger Besetzung ist es zu
Voraussetzung der Koppelung kommen!

Form von einem Spalten der Erziehen kann sich
bei hoher Besetzung sehr stark ändern!

X. Halbleiter im Magnetfeld (Magnetooptik)

Wir hatten bisher den Fall von Metallen
in denen durch an den Materialien die Besetzung eingestrichelt wurde.
z. B. Quantenwell.

Jetzt sehen wir uns an einen Ide an:



Aus der klassischen Physik ist bekannt
das Elektronen sich auf Kreisbahnen
senkrecht zum Magnetfeld bewegen.

Nach Lenz'scher Regel sollte sich eine
Bahn ausbilden.

Also Ansatz

$$\underline{B} = B \underline{e}_z$$

Das zugehörige Vektorpotential hat die Form

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{2} \underline{B} \times \underline{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (-2x B_y + 2y B_x)$$

Anset \vec{A} in \vec{p} :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -B_y \\ B_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B+B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

Das wird jetzt in den H_m eingesetzt

Zur Energie

$$H = \frac{(p - eA)^2}{2m}$$

A einsetzen in H in Ortsdarstellung:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\underbrace{\left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{eB_y}{2\hbar} \right)^2}_{x-y \text{ Ebene}} + \underbrace{\left(i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eB_x}{2\hbar} \right)^2}_{z\text{-Richt}} + \underbrace{\left(i \frac{\partial}{\partial z} \right)^2}_{z\text{-Richt}} \right)$$

Wir sehen das Problem ist separierbar.

Im Folgenden betrachten wir nur die $x-y$ Ebene

Wir führen die charakteristische magnetische Länge ein: $l^2 = \frac{\hbar^2}{eB}$

Dann hat der $x-y$ Teil die Form:

$$H_{xy} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2l^2} \right)^2 + \left(i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2l^2} \right)^2 \right)$$

Mit Hilfe der charakteristischen Länge stellen wir die Koordinaten

um $\underline{r} = l \underline{g}$, damit wird die Gleichung unabhängig von Magnetfeld.

Außerdem führen wir die zyklotron Frequenz ein $\omega_c = \frac{\hbar}{m l^2} = \frac{eB}{m}$

$$H_{xy} = \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[\left(i \frac{\partial}{\partial g_x} + \frac{1}{2} g_y \right)^2 + \left(i \frac{\partial}{\partial g_y} - \frac{1}{2} g_x \right)^2 \right]$$

als Multiplikation

$$= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{4} (p_x^2 + p_y^2) + i \frac{2}{\hbar} p_y - i \frac{2}{\hbar} p_x \right]$$

$$= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left(-\nabla_{\rho}^2 + \frac{1}{4} \rho^2 + \frac{L_z}{\hbar} \right)$$

Das sieht irgend wie aus wie ein harmonischer Oszillator!

Ziel: Konstruieren von Erzeuger und Vernichter!

Gründet Koordinate bische Transformation (Koordinate auf komplexen Ebene
kappen!)

$$\alpha = \frac{p_x - i p_y}{2}, \quad \beta = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\alpha^\dagger = \frac{p_x + i p_y}{2}, \quad \beta^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$$

Bei harmonischen Oszillatoren werden Orts (α) und Impulsoperator (β)
addiert für Erzeuger und Vernichter

Erzeuger und Vernichter für inter-Landau level

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta) \quad \text{und} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^\dagger + \beta^\dagger)$$

Man kann leicht zeigen dass

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad \text{und} \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

Ähnlich kann man die inter-Landau level

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^\dagger - \beta^\dagger) \quad \text{und} \quad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - \beta)$$

(auch Beweis)

Man kann jetzt zeigen:

$\| H_{xy} = \hbar \omega_L (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \| \leftarrow$ Die Energie wird durch die intra- und inter-Landau-Quanten bestimmt.

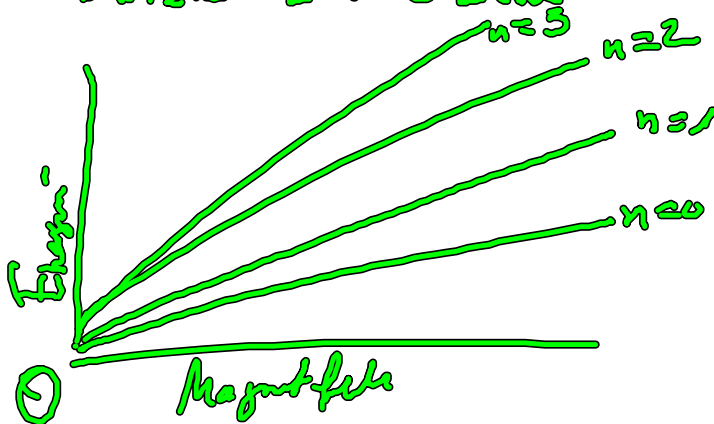
und $\| L_z = a^\dagger a - b^\dagger b \|$

Der Drehimpuls in z-Richtung ist die Differenz zwischen intra- und inter-Landau-Quanten.

Ähnlichkeit zum harmon. Oszillator existiert

$E_n = \hbar \omega_L (n + \frac{1}{2})$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$

Skizze Landau Level



Analog zum harmon. Oszillator kann die der Eigenzustände geschrieben werden

$\phi_{n,n'} = |n\rangle |n'\rangle$ (b ist der harmon. Osz. mit Energie 0)

Dabei ist klar

$n, n' = 0, 1, 2, 3, \dots$

intra-Landau → intra-Landau

Für den Grundzustand gilt:

$a \phi_{00} = a |0\rangle |0\rangle = 0$

$b \phi_{00} = 100 \quad b 100 = 0$

Setzen wir die Ableitungen des Potentials a und b ein, so erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für den Grundzustand. Der Lagrange-Multiplikator ist:

$$\phi_{00}(x_1, x_2) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{4}\right)$$

Wir sieht die Diskriminanzkomponente aus:

$$L_2 \phi_{n_1 n_1} = (a^2 a - b^2 b) \phi_{n_1 n_1} = (n_1 - n_1') \phi_{n_1 n_1} = m \phi_{n_1 n_1}$$

$$\phi_{n_1 n_1}(x_1, x_2) = \frac{a^{n_1} b^{n_1'}}{\sqrt{n_1! n_1'}} \phi_{00}(x_1, x_2) \quad \text{mit } m = n_1 - n_1'$$

Beachte: Die Lander $L_{n_1 n_1}$ sind n_1 -fach entartet, es gibt n_1 zu n_1 Lander-Land für jeden Wert von n_1 .

Die Lander $L_{n_1 n_1}$ sind die Erklärer für den Quanten-Hall Effekt