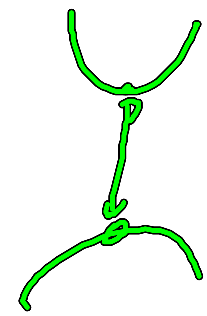
X. Halbleiter im Magnetfeld (Fortsetzung)

Als Beispiel ein 2D Magneto-Exziton:

Wir sehen uns jetzt ein Elektron-Loch Paar im Magnetfeld an!



Die Schrödingergl.:

$$H^{mx}\, \psi(\underline{r}_e, \underline{r}_h) = \underline{E}\, \psi(\underline{r}_e, \underline{r}_h) \qquad (mx \text{ Magneto Exziton})$$

Der Hamiltonoperator hat die Form

$$H^{mx} = \sum_{i=e,h} \frac{1}{2m_i} \left(p_i - \frac{e_i}{2} \underline{B} \times \underline{r}_i\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 |\underline{r}_e - \underline{r}_h|}$$

mit $e_e = -e$ und $e_h = e$

Jetzt wird eine kanonische Transformation verwendet:

$$\underbrace{U(\underline{r})}_{\text{Transformation}} = \exp\left(-i \frac{e}{2} \underline{B} \cdot (\underline{R} \times \underline{r})\right) \psi(\underline{r}_e, \underline{r}_h)$$

wobei $\underline{r}$ und $\underline{R}$ Relativ- und Schwerpunktskoordinaten.

Dann wird der Hamiltonoperator modifiziert:

$$H_r^{mx}\, U(\underline{r}) = \underline{E}\, U(\underline{r})$$

mit

$$H_r^{mx} = \sum_i \frac{1}{2m_r} \left(p - \frac{e}{2} \underline{B} \times \underline{r}_i\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

Wir haben also nur noch die Relativbewegung zu lösen!

Wir skalieren das mit der Länge l_1 ergibt wieder!

$$H_r^{ex} = E_0\, 2 \sum_{\text{Spin}} \underbrace{\frac{\hbar\omega_c}{2E_0}}_{\tilde{\lambda}^{-1}} \left[\left(i\frac{\partial}{\partial \rho_x} + \frac{e_i}{l_c}\rho_x\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial \rho_y} - \frac{e_i}{l_c}\rho_y\right)^2\right] - \frac{2\lambda^{\frac{1}{2}}}{\rho}$$

$$\lambda = \frac{a_0^2}{l^2} \leftarrow \text{Bohrradius des Excitons}$$

Hier ist E_0 3D-Exciton Rydberg Energie.

Der Parameter λ gibt an ob die Coulomb Bindungsenergie oder der Effekt des Magnetfeldes überwiegt.

Je nach dem kann das Magnetfeld oder die Coulomb WW als Störung aufgefasst werden.

Wir entwickeln die Wellenfkt in Landau Zuständen:

$$U_\alpha = \sum_n c_{\alpha n}\, \phi_{nn} = \sum_n c_{\alpha n}\, \underset{\text{Loch}}{|n\rangle}\, \underset{\text{Elektron}}{|n\rangle}$$

Das ergibt für die stationäre Schrödinger Gl.

$$\sum_n \left[\, 2\lambda\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\delta_{nn'} - V_{nn'}\right] c_{\alpha n} = E_\alpha\, c_{\alpha n'}$$

Mit den Coulombelementen

$$V_{nn'} = \langle n'|\langle n'|\; V(\rho)\, |n\rangle|n\rangle = \frac{1}{L^2}\sum_k V_k \langle n'|\langle n'| e^{ik\rho}|n\rangle|n\rangle$$

mit 2D Potential $V(\rho) = \frac{(2\lambda^{\frac{1}{2}})}{\rho}$ und $V_k = \frac{4\pi\lambda^{\frac{1}{2}}}{k}$

Im Folgenden müssen die Coulomb Matrix Elemente berechnet werden.

Lange Rechnung (s. Haug-Koch):

$$V_{nn} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk\, k\, V_k\, |J_{nn}|^2$$

mit $J_{n'n} = \sqrt{\frac{N!}{N'!}}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^{N'-N} e^{-\frac{k^2}{4}}\, L_N^{(N'-N)}\left(\frac{k^2}{2}\right)$

$N' = \sup(n', n) \qquad N = \inf(n', n)$

Wie kann die Exzitonen, kann man eine Gleichung konstruieren

$$\left[H_v^{mx}(\mathbf{r}) + E_g - \hbar(\omega + i\delta)\right] P_{vc}(\mathbf{r}) = d_{cv} \underbrace{\mathcal{E}(t)\,\delta(\mathbf{r})\,l^2}_{\text{Optische Treiberterm}}$$

Dabei kann $P_{vc}(\mathbf{r})$ bzgl. der Eigenfkt. U_α von H_v^{mx} dargestellt werden:

$P_{vc}(\mathbf{r}) = \sum_\alpha c_\alpha U_\alpha(\mathbf{r})$

Lösung der obigen Gleichung

$$c_\alpha = \frac{d_{cv}\, U_\alpha(r=0)\, l^2\, \mathcal{E}}{E_0 E_\alpha + E_g - \hbar(\omega + i\delta)}$$

Dabei ist die optische Suszeptibilität

$$\chi(\omega) = \frac{P(\omega)}{\mathcal{E}(\omega)} = \sum_\alpha \frac{|d_{cv}|^2\, |U_\alpha(r=0)|^2}{E_0 E_\alpha + E_g - \hbar(\omega + i\gamma)}$$

$$U_\alpha(r=0) \underset{\uparrow}{=} \sum_{n n'} \langle r=0 | n\rangle |n'\rangle \langle n'| \langle n | \alpha\rangle$$

Vollständigkeit der Landaubasis

Für $\phi_{nn'}(r)$ verschwindet für $r \to 0$ wie $r^{|n-n'|}$

daher trägt nur $n = n'$ bei

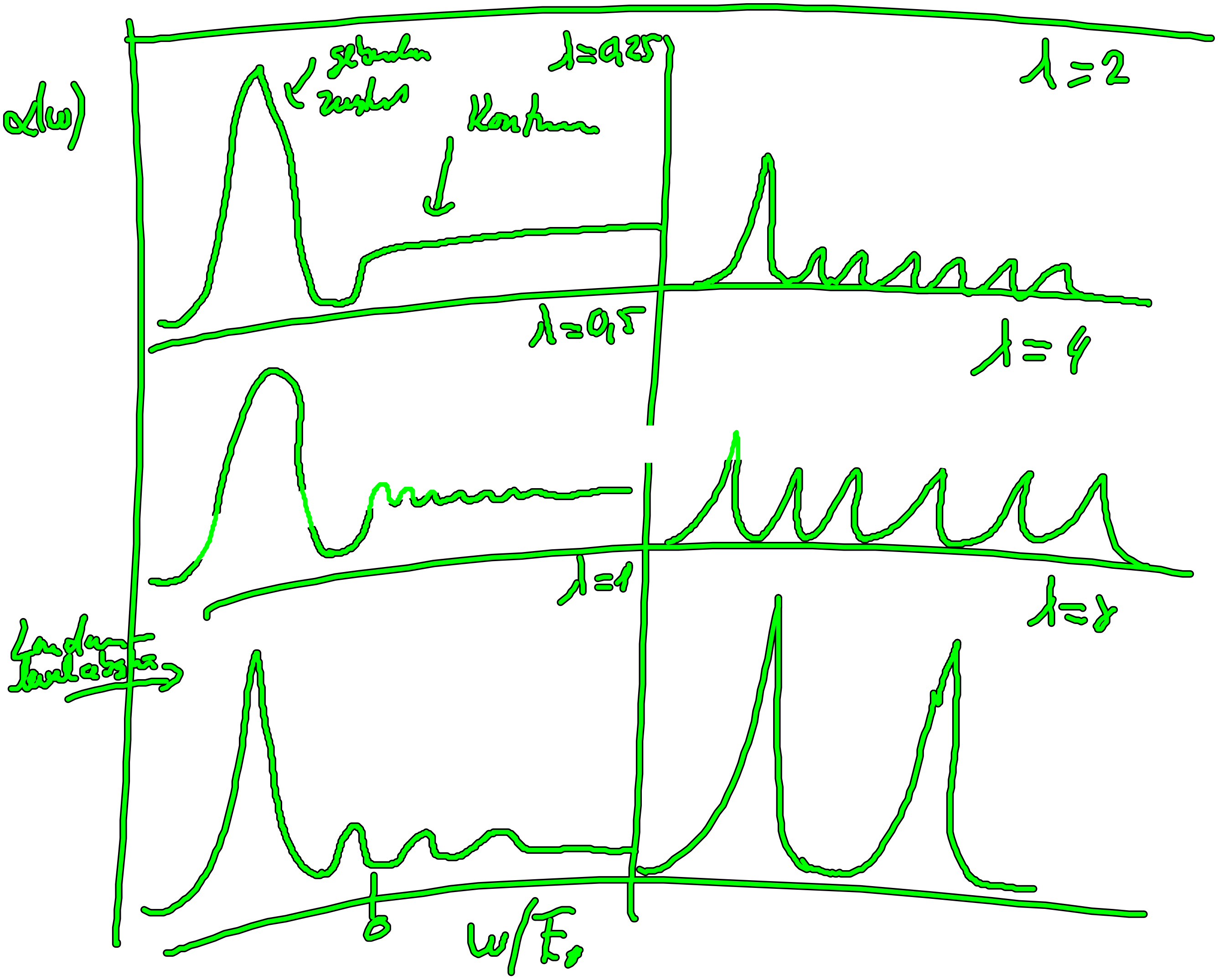
Wobei

$$|\langle r=0 | n\rangle |n\rangle|^2 = \frac{1}{2\pi l^2}$$

$$\| \; \chi(\omega) \propto \frac{\lambda}{2\pi} \sum_\alpha \frac{|\sum_n \langle \alpha | n\rangle |n\rangle|^2}{E_\alpha + (E_g - \hbar(\omega + i\gamma))/E_0}$$

magneto-exciton

$$\lambda = \frac{a_0^2}{l^2} \qquad a_0 = \frac{\hbar^2\, 4\pi\, \varepsilon_0 \varepsilon_r}{e^2 m_r} \qquad l^2 = \frac{\hbar}{eB}$$



XI Polaritonen

Das elektromagnetische Feld wechselwirkt mit der Materie, das führt zur Ausbildung von neuen Quasiteilchen aus polarisierter Materie und deren Photonen.

Beispiele:

(1) Exciton Polaritonen (z.B. zwischen zwei Bänder)

$$B^+_{\nu,\underline{K}} = \sum_{k,k'} \delta(\underline{K}-(k-k')) \psi_\nu\left(\frac{k+k'}{2}\right) a^+_{c k_1 s} a_{v k_1 s}$$

Exciton Wellenfunktion im k-Raum

$$= \sum_k \psi_\nu\left(k-\frac{\underline{K}}{2}\right) a^+_{c,k,s}\, a_{v,\underline{K}-k,s}$$

Nehmen wir nun ein bestimmtes Exciton bei $\underline{K}=0$

$$[B_{0,0}, B^+_{0,0}]_- = \sum_{k,k'} \psi_0(k)\psi_0^*(k') [a^+_{vk,s} a_{ck}, a^+_{ck'} a_{vk'}]_-$$

$$= \sum_k |\psi_0(k)|^2 \underbrace{(a^+_{vks} a_{vks} - a^+_{cks} a_{cks})}_{\simeq 1 \text{ nur im Gleichgewicht}}$$

$\simeq 1$ also fast Bosonen

(2) Die transversalen optischen Phononen

$$P(x) = \sum_{i,q} P_{i,q} (b_{i,q} + b^+_{i,-q}) e^{iq\cdot x}$$

diese sind Bosonen,

(3) Häufig quantisiert man auch Polaritonen phänomenologisch wie in (2) für optische Phononen!

Einschub klassische Motivation der Polaritonen

Maxwellgl.

(i) $\nabla\times\underline{B} = \frac{1}{c^2}\dot{\underline{E}} + \mu_0\dot{\underline{P}}$ (ii) $\nabla\times\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

Einfache Bewegungsgl. - harmonischer Oszillator

(iii) $\ddot{\underline{P}} + \omega_0^2\underline{P} = \varkappa\,\varepsilon_0\underline{E}$

Anwenden einer Fourierentwicklung

$E_x = E_{x0}\, e^{ikz - i\omega t}$; $B_y = B_{y0}\, e^{ikz - i\omega t}$

$P_x = P_{x0}\, e^{i(kz-\omega t)}$

Setzen wir das in die Maxwellgl. ein:

(i) $\frac{\omega}{c^2} E_{x,0} + \omega\mu_0 P_{x,0} - k B_{y,0} = 0$

(ii) $k E_{x0} - \omega B_y = 0$

(iii) $\cancel{\chi}\,\varepsilon_0 E_x + (\omega^2 - \omega_0^2) P_x = 0$

In Matrixform

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} & \omega\mu_0 & -k \\ k & 0 & -\omega \\ \chi\varepsilon_0 & \omega^2-\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ P_x \\ B_y \end{pmatrix} = 0$$

Die Determinante ergibt:

$$\| \quad \omega^4 - \omega^2 \underset{\Uparrow}{(}\, \omega_0^2 + \cancel{\chi} + c^2 k^2) + \omega_0^2 c^2 k^2 = 0 \,\|$$

Dispersionsrelation! (Auswertung in der QM)

Das Photonische Feld ist: (Vektorpotential)

$$A = \sum_{k\sigma} A_\sigma \left(c_{k\sigma} + c_{k\sigma}^+ \right) e^{i k \cdot r}$$

$\uparrow$ Polarisationsrichtung

Wir betrachten jetzt vorrangig das TO-Phonon Feld

Der Hamiltonoperator des Systems ist: (nur eine Polarisationsrichtung)

$$H = \underbrace{\sum_k E_{ph,k}\, c_k^+ c_k}_{\text{Photon}} + \underbrace{\sum_k E_{pol,k}\, b_k^+ b_k}_{\text{Polarisation, also Phonon oder Exziton etc.}}$$

$$+ \underbrace{H_{\text{Kopplung}}}_{\text{Kopplungsterm}}$$

Die Kopplung mit dem Dipolfeld hat die Form $\underline{E} \cdot \underline{P}$?

Begründung: nur so ergibt es bei Verwendung von Hamilton Bewegungsgl. die Maxwellgl. mit $\nabla \cdot E \propto \nabla \cdot P + \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$E \propto -(c_k - c_{-k}^+)$ wegen $E \propto -\dot{A}$

$(P \propto (b_k + b_k^+))$

Damit muß die Form der Kopplung so aussehen

$$H_{kopplung} = \sum_k E_{koppl,k} \left(c_k^+ b_k - c_k b_k^+ - c_k b_{-k} + c_{-k}^+ b_k^+ \right)$$

Die Kopplung stört!

Ich möchte einen harm. Oszillator haben! (ungekoppelt)

Ansatz: (Hopfield Transformation)

$$\alpha_{\underline{k}} = w\, c_k + x\, b_k + y\, c_{-k}^+ + z\, b_{-k}^+ \quad (\times\times)$$

Wunsch:

$$H = \sum_k \left[E_{k,1} \alpha_{1k}^+ \alpha_{1\underline{k}} + E_k^{(2)} \alpha_{2k}^+ \alpha_{2k} \right]$$

diese Form zu erreichen!

Wenn H die Form hätte, würde gelten:

$$[\alpha_k, H] = E_k \alpha_k$$

Wir kombinieren jetzt $H_{kopplung}$ und $(\times)$

und erhalten eine Gleichung der Form:

$$[\alpha_k, H_0]_- = [w c_k + x b_k + y c_{-k}^+ + z b_{-k}^+, H]_-$$

$$= w [c_k, H_0]_- + x [b_k, H_0]_- + y [c_{-k}^+, H_0]_- + z [b_{-k}^+, H_0]_-$$

$$= w E_{pt,k} c_k + x E_{ph,k} b_k - y E_{pt,k} c_{-k}^+ - z E_{ph,k} b_{-k}^+$$

$$[\alpha_k, H_{koppl}]_- = w [c_k, H_{kopp}]_- + x [b_k, H_{kopp}]_- + y [c_{-k}^+, H_{kopp}]_- + z [b_{-k}^+, H_{kopp}]_-$$

$$= w E_{koppl,k} b_k - x E_{koppl,k} c_k - E_{koppl,k} b_{-k}^+ + z E_{koppl,k} c_{-k}^+$$

+ weitere Terme

$$E_k (w c_k + x b_k + y c_{-k}^+ + z b_{-k}^+) = E_k \alpha_k$$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} c_k & b_k & c^\dagger_{-k} & b^\dagger_{-k} \end{array} \\
\begin{array}{c} c_k \\ b_k \\ c^\dagger_{-k} \\ b^\dagger_{-k} \end{array} &
\begin{pmatrix}
E_{ph,k}-E_k & -E_{kopp,k} & 0 & -E_{kopp,k} \\
E_{kopp,k} & E_{pl,k}-E_k & E_{kopp,k} & 0 \\
0 & -E_{kopp,k} & -E_{ph,k}-E_k & E_{kopp,k} \\
E_{kopp,k} & 0 & -E_{kopp,k} & -E_{pl,k}-E_k
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0
\end{array}
$$

Das ist nur erfüllt wenn die Determinante verschwindet

$$
(E_k)^4 - (E_k)^2 \left(E_{ph,k}^2 + E_{pl,k}^2 \right) + E_{ph,k}^2 \, E_{pl,k}^2 + 4\, E_{ph,k} E_{pl,k} E_{kopp,k}^2 = 0
$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann die Energie des Polaritons E_k berechnet.

Mit der Gleichung kann w, x, y, z berechnet werden.