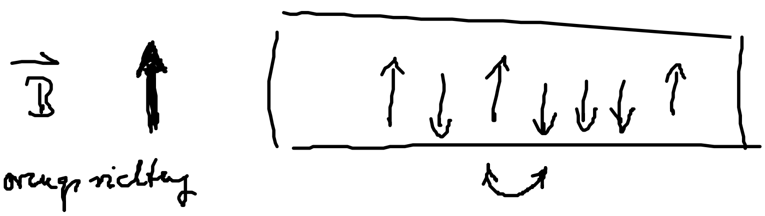
11. Magnetismus

- Modell wechselwirkender Spins um magnetische Effekte zu beschreiben: insbesondere verschiedene Arten v. Magnetisierung

- betrachten lokalisierte Spins (keine kinetische Energie)



N Spins im Wärmebad der Temperatur T, N = fest
$\hat{=}$ kanonisches Ensemble

Vorzugsrichtung d. externen magnetisch Feld in z-Richtung

Spin-Spin Wechselwirkung

- nehmen räumlich homogenes System an

<u>Frage</u>: Wie sieht das Wechselspiel von ausrichtendem <u>Magnetfeld</u> und <u>Temperatur</u> (Durchmischg. d. Spinrichtg.) aus?

dazu sieht man sich Gesamtspin/Magnetisierung an.

11.1. Spins im Magnetfeld

kanonisch: $H = G$ als Observable

$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ mit $\vec{\mu}$: magnetisches Gesamtmoment und $\vec{B}$: magnetisches Feld

räumliche Orientierung in z-Richtg:

$$= -\underline{\underline{\mu_z}} B_z = -\underline{\underline{g \mu_B \sum_{\nu=1}^{N} S_z^\nu}} B_z \quad , \quad B_z \equiv B$$

g - gyromagnetischer Faktor (≈ 2) f. Elektronen

μ_B - Bohrsches Magneton (Konstante)

S_z^ν - z-Komponente d. ν-ten Spins

z-Komponente d. Spins erfüllt Eigenwertgleichung

$$S_z^\nu |m_s^\nu\rangle = m_s^\nu |m_s^\nu\rangle \quad , \quad m_s^\nu = \pm \frac{1}{2}$$

lokalisiert heißt kein Bahndrehimpuls $\vec{l}$.

können Magnetisierung berechnen:

$$M_z \equiv M = \langle \mu_z \rangle = sp(\rho \mu_z) = sp(R_k \mu_z)$$

$\underline{\underline{R_k}} \mathrel{\hat{=}}$ $\underline{\underline{\text{kanonisch}}}$ statistischer Operator

$$\mathcal{G} = H, \; \lambda_H = \beta = \frac{1}{kT} \quad , \quad h_\alpha = B, N$$

$$R_k = \frac{e^{-\beta H}}{Z_k}, \quad Z_k : \text{kanonische Zustandssumme}$$

$$Z_k = sp\left(e^{-\beta H}\right)$$

konkret einsetzen:

$$M = sp\left(\frac{e^{-\beta H}}{Z_k} \underbrace{g \mu_B \sum_{\nu=1}^{N} S_z^\nu}_{\text{wird in } H \text{ wiedergefunden (bis auf } \frac{1}{-B}\text{)}} \right)$$

$$= \frac{1}{Z_k} \frac{1}{(-B)} sp\left(e^{-\beta H} H\right)$$

$$= \frac{1}{Z_k B} \frac{\partial}{\partial \beta} sp\left(e^{-\beta H}\right) = \frac{1}{Z_k B} \partial_\beta Z_k$$

Die gesamte Info kann wieder über die Zustandsumme gefunden werden.

$$M = \frac{1}{B} \partial_\beta \left(\ln Z_k\right)$$

Berechnung d. Zustandssumme

$Z_K = sp\left(e^{-\beta H}\right)$, berechnen in Eigenzustandsbasis von H

$$H|n\rangle = \mathcal{E}_n |n\rangle$$

$$\leadsto Z_K = \sum_n e^{-\beta \mathcal{E}_n} \quad \left(\text{denn: } \sum_n \langle n| e^{-\beta H} |n\rangle = \sum_n \langle n|n\rangle e^{-\beta \mathcal{E}_n}\right)$$

$\mathcal{E}_n$ ist gesucht, gegeben über alle Spin beiträge ν : 1 bis N, ε_ν : Energie des ν-ten Spins

$$\mathcal{E}_n = \sum_{\nu=1}^{N} \varepsilon_\nu = -\sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{2\mu_B B}_{\text{Energie}} \underbrace{m_s^\nu}_{\text{legt Spinrichtung fest}} \quad \left(m_s^\nu = \pm \frac{1}{2}\right)$$

ein mgl. Zustand mit festem n :

$$\uparrow \uparrow \downarrow \uparrow \quad \uparrow \uparrow \qquad N = 6$$

alle sind zu finden (alle n)

alle n's sind durch die mgl. Kombinationen aller einzelnen Spinzustände zu finden.

$$\mathcal{E}_n = -2\mu_B B \left(m_s^1 + m_s^2 + m_s^3 + \dots m_s^N\right)$$

$\sum_n$ in Zustandssumme läuft über alle Kombinationen

$$\leadsto \quad Z_k = \underbrace{\sum_{m_s^1=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{m_s^2=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cdots \sum_{m_s^N=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}}_{N\text{-Summen}} \; \underbrace{e^{\beta 2 \mu_B B \left(m_s^1 + m_s^2 + \cdots m_s^N\right)}}_{N\text{-Faktoren}}$$

$$= \left(\sum_{m_s=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{\beta 2 \mu_B B m_s} \right)^N = Z_1^N$$

Es entsteht wieder die Einteilchenzustandssumme weil die Spins nicht wechselwirken, Z_1 enthält die gesamte Info

$$Z_k = \left(e^{-\beta \mu_B B} + e^{\beta \mu_B B} \right)^N$$

$$= \left(2 \cosh\left[\beta \mu_B B\right] \right)^N$$

Magnetisierung durch Z_k bestimmt:

$$M = \frac{1}{B Z_k} \cdot \partial_\beta Z_k$$

$$= \frac{1}{B Z_k} N \left(2 \cosh[\cdot] \right)^{N-1} \cdot 2 \cdot \sinh[\cdot] \, \mu_B B$$

$$Z_u = \left(2\cosh[\cdot] \right)^N$$

$$M = \mu_B N \tanh[\beta \mu_B B]$$

ist die Magnetisierung als Funktion von $B, N, T = \frac{1}{k\beta}$

Diskussion f. 2 Fälle:

a) Spins ohne Wechselwirkung:

B wird als externes Feld von außen interpretiert

b) Spins mit Wechselwirkung:

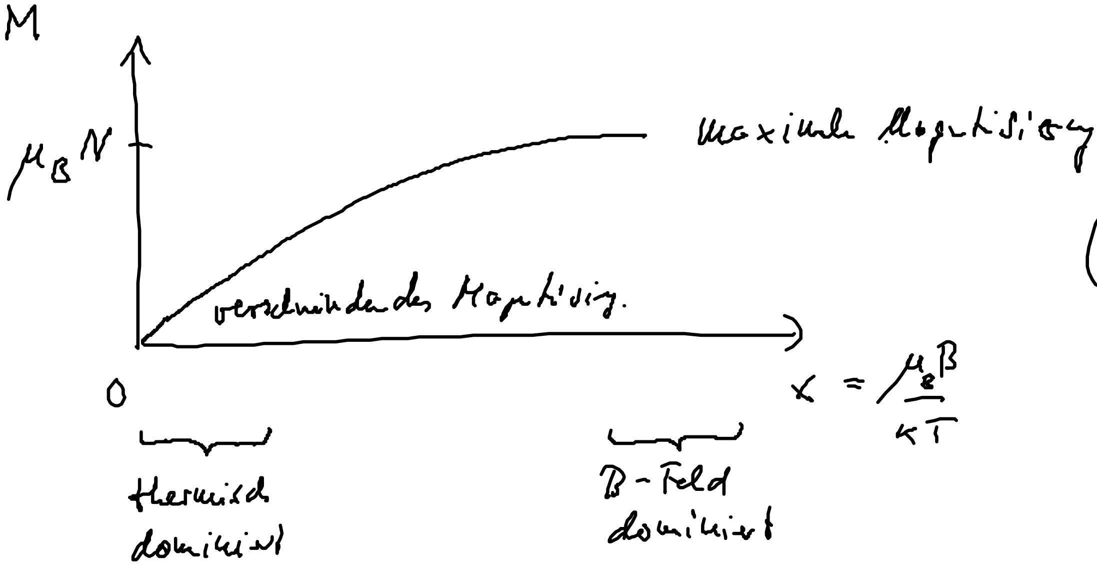
B wird als Summe von externen und internem Feld interpretiert

$$B = B_{ext} + B_{int}$$

11.2. Spins im externen Feld

B ist von außen fest vorgegeben

Variable: $x = \frac{\mu_B B}{kT}$ $\qquad M = \mu_B N \tanh(x)$



$$\Big(\lim_{x \to \infty} \tanh x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \tanh x = 0 + x \cdots \Big)$$

Bemerkungen:

a) kleine B-Felder im Vgl. z. thermisch Energie:

$M \sim B$, kleine Magnetisierung

b) große B-Felder im Vgl. zur thermischen Energie:

$M \to N\mu_B$, also maximale Magnetisierung

→ Wettbewerb zwischen thermisch induzierter Unordnung und Ordnung induzierendem Magnetfeld

c) Def. v. magnet. Suszeptibilitäten:

$M = \chi B$ (f. kleine Felder)

berechnet χ: $\chi = \frac{\mu_B^2 N}{kT} > 0$

$\chi > 0$: paramagnetisch Verhalten (Spins)

im Fall von

$\chi < 0$: diamagnetisch Verhalten (Bahnmagnetismus)

Vorzeichen mit Lenzscher Regel konsistent

können ohne Spin-Spin WW verstanden werden,
diese dominiert bei Ferromagnetismus

11.3. Interne Felder: Spin-Spin Wechselwirkung

- ferromagnetische Stoffe: unterhalb von einer kritischen Temperatur T_c
  ist $M \neq 0$ auch ohne angelegtes B-Feld
  oberhalb von T_c : $M = 0$

- wird d. Spin-Spin WW erklärt, hier mit
  Theorie d. mittleren Felds (mean field theory)

$\uparrow \underset{WW}{\sim} \uparrow$ WW erzeugt ein Feld in Probe zwischen d. Spins

- weil Maxwellgl. linear sind, Ansatz:

$$B \to B_{eff} = \underbrace{B_{ext}}_{} + \underbrace{B_{int}}_{}$$

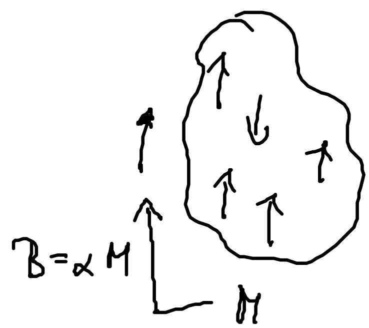
externe Feld	interne Feld

<u>Ansatz</u> $B_{int} = \alpha M$

α – Proportionalitätsfaktor, Aufgabe der Vielteilchentheorie

d.h. M (wenn es einmal da ist) wirkt auf alle Spins zurück

<u>Bild</u>



jeder einzelne Spin fühlt das mittlere Feld das sich durch die Summe aller umgebenden Spins ausbildet

Verallgemeinerung mit Spin-Spin WW: $\boxed{M = \mu_B N \tanh\left(\beta \mu_B B_{eff}\right)}$

<u>Erklärung v. Ferromagnetismus:</u>

ansetzen f. kleine M, am Ende $B_{eff} \to 0$ um zu sehen, ob Dauermagnet beschrieben werden kann

$$\operatorname{arth}\left(\frac{M}{N\mu_B}\right) = \beta \mu_B B_{eff}, \quad M \to 0$$

Taylorreihe nach M:

$$\frac{M}{\mu_B N} + \frac{1}{3}\left(\frac{M}{\mu_B N}\right)^3 = \beta \mu_B B_{at} + \beta \mu_B \alpha M$$

$$\beta \mu_B B_{at} = M\left(\frac{1}{\mu_B N} - \alpha \mu_B \beta\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{M}{\mu_B N}\right)^3$$

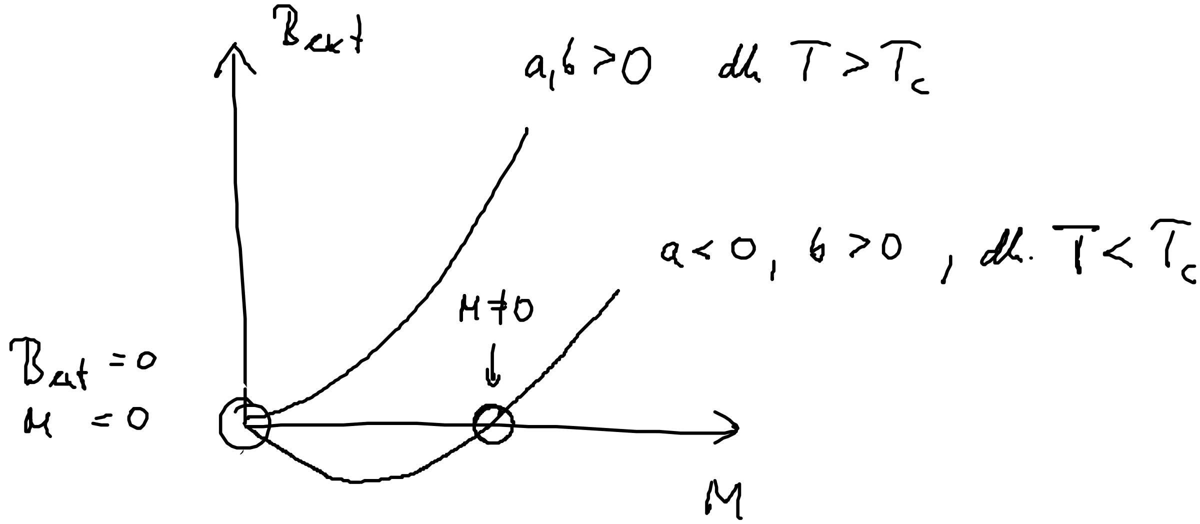
$$\boxed{B_{ext} = a M + b M^3}$$

$$a = \alpha\left(\frac{T}{T_c} - 1\right)$$

$$b = \frac{kT}{3\mu_B} \frac{1}{(\mu_B N)^3}$$

$$T_c = \frac{\mu_B^2 N \alpha}{k}$$

führt auf folgend Verhalten:



f. $B_{ext} = 0$, d.h. kein externes Magnetfeld

ergibt sich für $a > 0$ $(T > T_c)$ nur $M = 0$

und für $a < 0$ $(T < T_c)$ 2 Lösungen $M = 0$ und $M \neq 0$

Dies geschieht nur aufgrund der Spin-Spin WW $(\alpha \neq 0)$

Spins richten sich offensichtlich selbständig (spontan) aus

und minimieren damit ihre Energie.

Beispiel f. Phasenübergang:

„dramatische Änderung einer Größe M (Ordnungsparameter)

als Funktion einer Größe T (Kontrollparameter)"

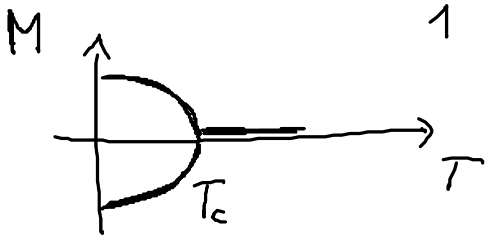
funktionale Abhängigkeit $M(T)$ ist spezifisch

Suche $M = M(T)$

$$\alpha\left(\frac{T}{T_c}-1\right) + \frac{kT}{3\mu_B}\,\frac{M^2}{(\mu_B N)^3} = 0$$

in Umgebung von T_c: $T \approx T_c$

$$M = \pm N\mu_B\left[\frac{3\mu_B^2 N\alpha}{\underbrace{kT_c}_{1}}\left(\frac{T_c-T}{T_c}\right)\right]^{1/2} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{T_c-T}{T_c}}$$



WW gewinnt gegen thermische Energie

thermische Energie gewinnt gegen WW