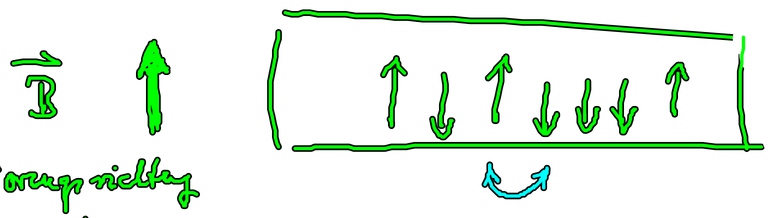
11. Magnetismus

- Modell wechselwirkender Spins um magnetische Effekte zu beschreiben: insbesondere verschiedene Arten v. Magnetisierung

- betrachten lokalisierte Spins (keine kinetische Energie)



$\vec{B}$

Vorzugsrichtung d. externen magnetisch Feld in z-Richtung

Spin-Spin Wechselwirkung

N Spins im Wärmebad der Temperatur T, N = fest

$\hat{=}$ kanonisches Ensemble

- nehmen räumlich homogenes System an

Frage: Wie sieht das Wechselspiel von ausrichtendem Magnetfeld und Temperatur (Durchmischg. d. Spinrichtg.) aus?

dazu sieht man sich Gesamtspin/Magnetisierung an.

11.1. Spins im Magnetfeld

kanonisch: $H = \xi$ als Observable

$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ mit $\vec{\mu}$: magnetisches Gesamtmoment und $\vec{B}$: magnetisches Feld

räumliche Orientierung in z-Richtung:

$$= -\mu_z B_z = -g\mu_B \sum_{\nu=1}^{N} S_z^\nu B_z \quad , \quad B_z \equiv B$$

g – gyromagnetischer Faktor (≈ 2) f. Elektronen

μ_B – Bohrsches Magneton (Konstante)

S_z^ν – z-Komponente d. ν-ten Spins

z-Komponente d. Spins erfüllt Eigenwertgleichung

$$S_z^\nu |m_s^\nu\rangle = m_s^\nu |m_s^\nu\rangle \quad , \quad m_s^\nu = \pm\frac{1}{2}$$

lokalisiert heißt kein Bahndrehimpuls $\vec{l}$.

können Magnetisierung berechnen:

$$M_z \equiv M = \langle\mu_z\rangle = sp(\rho\,\mu_z) = sp(R_k\,\mu_z)$$

$R_k \;\hat{=}\;$ kanonischer statistischer Operator

$$G = H, \; \lambda_H = \beta = \frac{1}{kT} \quad , \quad h_\alpha = B, N$$

$$R_k = \frac{e^{-\beta H}}{Z_k}, \quad Z_k: \text{kanonische Zustandssumme}$$

$$Z_k = sp\left(e^{-\beta H}\right)$$

konkret einsetzen:

$$M = sp\left(\frac{e^{-\beta H}}{Z_k} \underbrace{g\mu_B \sum_{\nu=1}^{N} S_z^{\nu}}_{\text{wird in } H \text{ wiedergefunden (bis auf } \frac{1}{-B})}\right)$$

$$= \frac{1}{Z_k}\frac{1}{(-B)}\, sp\left(e^{-\beta H} H\right)$$

$$= \frac{1}{Z_k B}\frac{\partial}{\partial \beta}\, sp\left(e^{-\beta H}\right) = \frac{1}{Z_k B}\,\partial_\beta Z_k$$

Die gesamte Info kann wieder über die Zustandssumme gefunden werden.

$$M = \frac{1}{B}\,\partial_\beta\left(\ln Z_k\right)$$

Berechnung d. Zustandssumme

$Z_K = \mathrm{sp}\left(e^{-\beta H}\right)$, berechnen in Eigenzustandsbasis von H

$$H|n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$\leadsto Z_K = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad \left(\text{denn: } \sum_n \langle n| e^{-\beta H} |n\rangle = \sum_n \langle n|n\rangle e^{-\beta E_n}\right)$$

E_n ist gesucht, gegeben über alle Spin beiträge $\nu = 1$ bis N, ε_ν: Energie des ν-ten Spins

$$E_n = \sum_{\nu=1}^{N} \varepsilon_\nu = -\sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{2\mu_B B}_{\text{Energie}} \underbrace{m_s^\nu}_{\text{legt Spinrichtung fest}} \qquad \left(m_s^\nu = \pm \frac{1}{2}\right)$$

ein mgl. Zustand mit festem n:

$$\uparrow \; \uparrow \; \downarrow \; \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \qquad N = 6$$

alle sind zu finden (alle n)

alle n's sind durch die mgl. Kombinationen aller einzelnen Spinzuständen zu finden.

$$E_n = -2\mu_B B \left(m_s^1 + m_s^2 + m_s^3 + \dots \; m_s^N\right)$$

$\sum_n$ im Zustandsraum läuft über alle Kombinationen

$$\rightsquigarrow \quad Z_k = \underbrace{\sum_{m_s^1=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{m_s^2=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cdots \sum_{m_s^N=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}}_{N\text{-Summen}} \; \underbrace{e^{\beta 2\mu_B B\,(m_s^1+m_s^2+\cdots m_s^N)}}_{N\text{-Faktoren}}$$

$$= \left(\sum_{m_s=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{\beta 2\mu_B B m_s}\right)^N = Z_1^N$$

Es entsteht wieder die Einteilchenzustandssumme weil die Spins nicht wechselwirken, Z_1 enthält die gesamte Info

$$Z_k = \left(e^{-\beta\mu_B B} + e^{\beta\mu_B B}\right)^N$$

$$= \left(2\cosh[\beta\mu_B B]\right)^N$$

Magnetisierung durch Z_k bestimmt:

$$M = \frac{1}{B Z_k} \cdot \partial_\beta Z_k$$

$$= \frac{1}{B Z_k} N \left(2\cosh[\cdot]\right)^{N-1} \cdot 2\cdot\sinh[\cdot]\,\mu_B B$$

$$Z_K = \left(2\cosh[\cdot] \right)^N$$

$$M = \mu_B N \tanh[\beta \mu_B B]$$

ist die Magnetisierung als Funktion von $B, N, T = \frac{1}{k\beta}$

Diskussion f. 2 Fälle:

a) Spins ohne Wechselwirkung:

B wird als externes Feld von außen interpretiert

b) Spins mit Wechselwirkung:

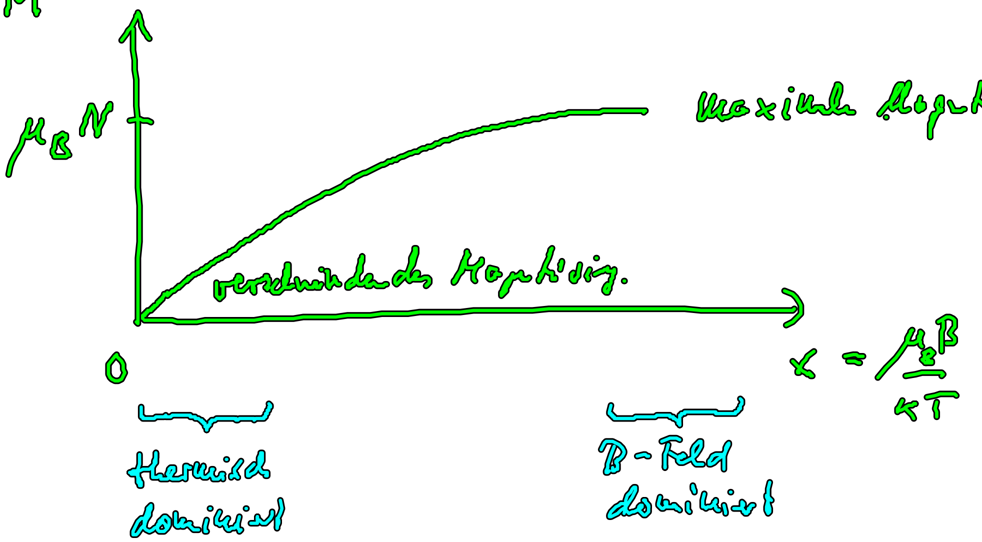
B wird als Summe von externem und internem Feld interpretiert

$$B = B_{ext} + B_{int}$$

11.2. Spins im externen Feld

B ist von außen fest vorgegeben

Variable: $x = \frac{\mu_B B}{kT}$ $\qquad M = \mu_B N \tanh(x)$



$$\left(\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1 \\ &\tanh x \underset{x \to 0}{=} 0 + x \cdots \end{aligned} \right)$$

Bemerkungen:

a) kleine B-Felder im Vgl. z. thermisch Energie:

$M \sim B$, kleine Magnetisierung

b) große B-Felder im Vgl. zur thermischen Energie:

$M \to N\mu_B$, also maximale Magnetisierung

→ Wettbewerb zwischen thermisch induzierter Unordnung und Ordnung induzierendem Magnetfeld

c) Def. v. magnet. Suszeptibilität:

$M = \chi B$ (f. kleine Felder)

berechnet χ: $\chi = \frac{\mu_B^2 N}{kT} > 0$

$\chi > 0$: paramagnetisches Verhalten (Spins)

im Fall von

$\chi < 0$: diamagnetisches Verhalten (Bahnmagnetismus)

Vorzeichen mit Lenzscher Regel konsistent

können ohne Spin-Spin WW verstanden werden,
diese dominiert bei Ferromagnetismus

11.3. Interne Felder: Spin-Spin Wechselwirkung

- ferromagnetische Stoffe: unterhalb von einer kritischen Temperatur T_c ist $M \neq 0$ auch ohne angelegtes B-Feld
  oberhalb von T_c : $M = 0$

- wird d. Spin-Spin WW erklärt, hier mit Theorie d. mittleren Felds (mean field theory)

$$\uparrow \underset{WW}{\sim} \uparrow$$

WW erzeugt ein Feld in Probe zwischen d. Spins

- weil Maxwellgl. linear sind, Ansatz:

$$B \to B_{eff} = \underbrace{B_{ext}} + \underbrace{B_{int}}$$

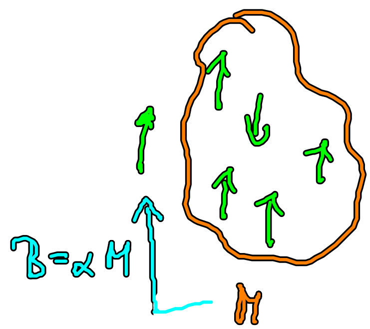
extern Feld   interne Feld

Ansatz $B_{int} = \alpha M$

α – Proportionalitätsfaktor, Aufgabe der Vielteilchentheorie

d.h. M (wenn es einmal da ist) wirkt auf alle Spins zurück

Bild



jeder einzelne Spin fühlt das mittl. Feld das sich durch die Summe aller umgebenden Spins ausbildet

Verallgemeinerung mit Spin-Spin WW: $$\boxed{M = \mu_B N \tanh\left(\beta \mu_B B_{eff}\right)}$$

Erklärung v. Ferromagnetismus:

ansatz f. kleine M, am Ende $B_{ext} \to 0$ um zu sehen, ob Dauermagnet beschrieben werden kann

$$\operatorname{arth}\left(\frac{M}{N\mu_B}\right) = \beta \mu_B B_{eff}, \quad M \to 0$$

Taylorreihe nach M:

$$\frac{M}{\mu_B N} + \frac{1}{3}\left(\frac{M}{\mu_B N}\right)^3 = \beta \mu_B B_{ext} + \beta \mu_B \alpha M$$

$$\beta \mu_B B_{ext} = M\left(\frac{1}{\mu_B N} - \alpha \mu_B \beta\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{M}{\mu_B N}\right)^3$$

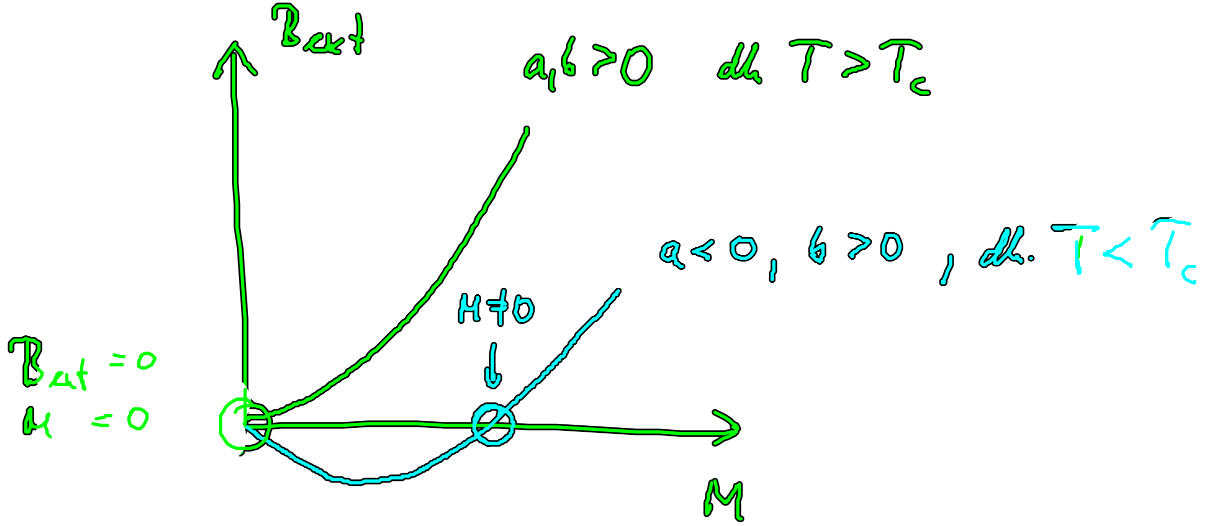
$$\boxed{B_{ext} = a M + b M^3}$$

$$a = \alpha\left(\frac{T}{T_c} - 1\right)$$

$$b = \frac{kT}{3\mu_B} \frac{1}{(\mu_B N)^3}$$

$$T_c = \frac{\mu_B^2 N \alpha}{k}$$

führt auf folgendes Verhalten:



f. $B_{ext} = 0$, d.h. kein externes Magnetfeld

ergibt sich für $a > 0$ $(T > T_c)$ nur $M = 0$

und für $a < 0$ $(T < T_c)$ 2 Lösungen $M = 0$ und $M \neq 0$

Dies geschieht nur aufgrund der Spin-Spin WW $(\alpha \neq 0)$

Spins richten sich offensichtlich selbständig (spontan) aus und minimieren damit ihre Energie.

Beispiel f. Phasenübergang:

„dramatische Änderung einer Größe M (Ordnungsparameter) als Funktion einer Größe T (Kontrollparameter)"

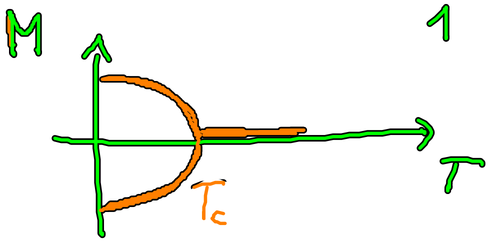
funktionale Abhängigkeit $M(T)$ ist spezifisch

Suche $M = M(T)$

$$\alpha\left(\frac{T}{T_c}-1\right)+\frac{kT}{3\mu_B}\frac{M^2}{(\mu_B N)^3}=0$$

in Umgebung von T_c : $T \approx T_c$

$$M = \pm N\mu_B\left[\frac{3\mu_B^2 N\alpha}{\underbrace{kT_c}_{1}}\left(\frac{T_c-T}{T_c}\right)\right]^{1/2} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{T_c-T}{T_c}}$$



WW gewinnt gegen thermische Energie

thermische Energie gewinnt gegen WW