

12.3. Ideales Fermigas

Modellsystem f. verschiedene Fermionen:

Elektronen in Festkörpern, Atomen

Nukleonen in Atomkern

bestimmte Formen v. flüssigen Helium, etc.

Analyse analog zum Bosegas:

chemische Zustandsgleichung gibt $\mu = \mu(\mu_0, T)$

Diskussion Fermi-Verteilung

Anwendungen

chemische Zustandsgleichung über Fermi-Funktion

$$\int_{\epsilon, s=1,2} p \bar{F} = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu) / \beta} + 1}$$

↑
Fermi-Verteilung!

Fermi-Verteilung f. fest Spri (↑ ↓ f. Elektronen)

für nicht spin-abhängige $\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (freie Fermionen im periodischen Kristall)

gilt $\int \bar{F}$ f. sich Spri unabhängig

gesucht: $\mu = \mu(u_0, T)$, $\varepsilon = \varepsilon_k$, $\int_{k \uparrow}^F = \int_{k \downarrow}^F$, $s = T, \downarrow$

aus: $\bar{N} \equiv N = \sum_{k,s} \int_{k,s}^F = 2 \sum_k \int_k^F$

= $\left\{ \begin{array}{l} \text{kontinuierlichen} \\ \text{Zustände in } k \text{-Raum} \end{array} \right\} \sum_k \rightarrow \int d^3k \quad = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}$

das ist $u_0 = u_0(\mu, T)$ wenn $u_0 = \frac{N}{V}$

sollte nach μ umgestellt werden

12.3.1. Einführung f. Zustandsdichte

für $\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ sind Kugelkoordinaten sinnvoll

$N = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}$ ist 1d Integral

führen wir $\frac{N}{V} = u_0$ und oft Integral leichter über ε statt k zu berechnen

Transformation: $k \rightarrow \varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ε als neue Variable

$k = \sqrt{2m\varepsilon} / \hbar$

$d\varepsilon = d\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) = \frac{\hbar^2 k}{m} dk = \frac{\hbar \sqrt{2}}{\sqrt{m}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$

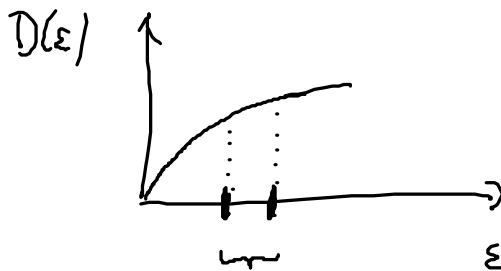
insgesamt:

$$u_0 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^2 f_k^F = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\sqrt{u_1}}{\frac{1}{\hbar} \sqrt{2}} \varepsilon^{-1/2} \varepsilon^{\frac{2u_1}{\hbar^2}} f_\varepsilon^F$$

$$u_0 = \int_0^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon) f_\varepsilon^F$$

Einfallig. d. Zustandsdichte $D(\varepsilon) = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_1^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \sqrt{\varepsilon}$

Beweis: a) $D(\varepsilon)$ heißt Zustandsdichte (Zustände pro Energie)



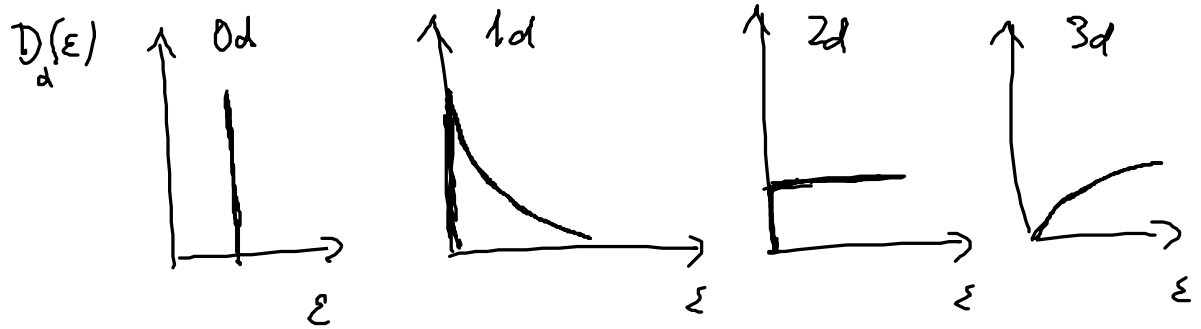
↑ Anzahl d. Zustände

b) Name: Anzahl d. Zustände ist gegeben durch

$$= \sum_{\vec{k}, s} 1 \rightarrow \int_0^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon)$$

↑ Zustandsdichteintegration

c) Zustandsdichte hängt ab v. Raumdimension (0-Dimension)



wird in Festkörpersystem realisiert.

$$d) \quad u_0 = \int_0^{\infty} d\epsilon \, D(\epsilon) f_{\epsilon}^{\bar{F}}(\mu, T)$$

ist implizit glg. f. $\mu = \mu(u_0, T)$

um $f_{\epsilon}^{\bar{F}}$ zu diskutieren $f_{\epsilon}^{\bar{F}}(u_0, T)$

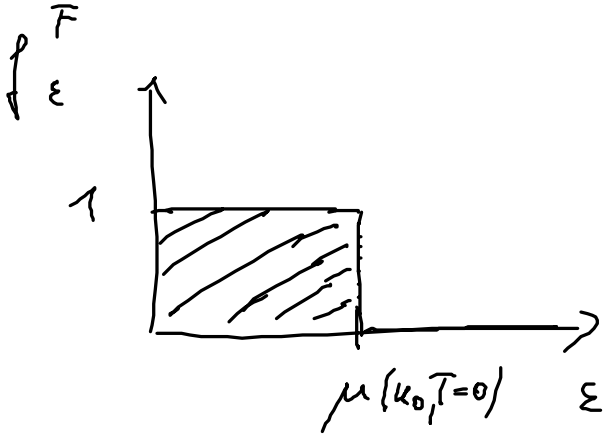
(f. u_0 klein, $T \rightarrow \infty$ sollte $\mu = \mu_{classisch}$)

12.3.2. Diskussion Fermifunktion

(i) $T \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty$: extremes Quantengrenzfall

$$\text{f. fest Spin} \cdot f_{\epsilon}^{\bar{F}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} = \begin{cases} 0 & \text{f. } \epsilon > \mu, \text{ denn } e^{\beta(\epsilon - \mu)} \rightarrow \infty \\ 1 & \text{f. } \epsilon < \mu, \text{ denn } e^{\beta(\epsilon - \mu)} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Darstellg. f. $T \rightarrow 0$



Stufe fkt. $\theta(\mu - \epsilon)$

$\int_{\epsilon}^{\mu} f_{\epsilon}$ bedeutet mittl. Zahl d. Elektronen in ein Zustand $|\epsilon\rangle$.

d.h. in jed. Zustand ist im Mittel 1 Elektron vorhanden bis zu Energie μ ,
 „aufgefüllt“ mit Elektronen bis μ : d.h. wenn alle Elektronen (u_0) verteilt ist, so landet man bei Energie μ .

das bedeutet:

$$n_0 = \int_0^{\infty} d\epsilon \mathcal{D}(\epsilon) \int_{\epsilon}^{\mu(u_0, T=0)} f_{\epsilon} \stackrel{T \rightarrow 0}{=} \int_0^{\mu(u_0, T=0)} d\epsilon \mathcal{D}(\epsilon)$$

$\mathcal{D}(\epsilon)$ einsetzen

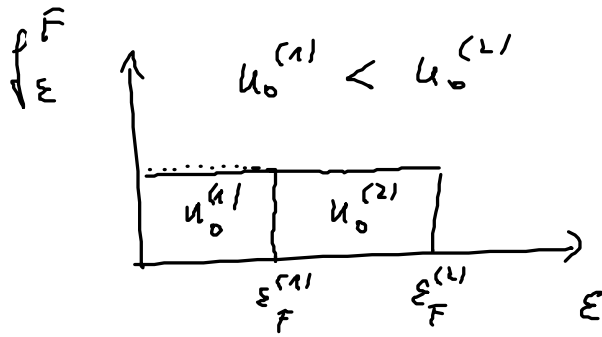
$$= \int_0^{\mu(u_0, T=0)} d\epsilon \sqrt{\epsilon} \frac{1}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} = \frac{1}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \frac{2}{3} \epsilon^{3/2} \Big|_0^{\mu}$$

$$n_0 = \frac{1}{\pi^2} \frac{m^{3/2} 2^{3/2}}{3 \hbar^3} \mu^{3/2}(u_0, T=0) = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \epsilon_F^{3/2} \quad (*)$$

„ Fermi energie: $\mu(u_0, T=0) = \epsilon_F(u_0)$

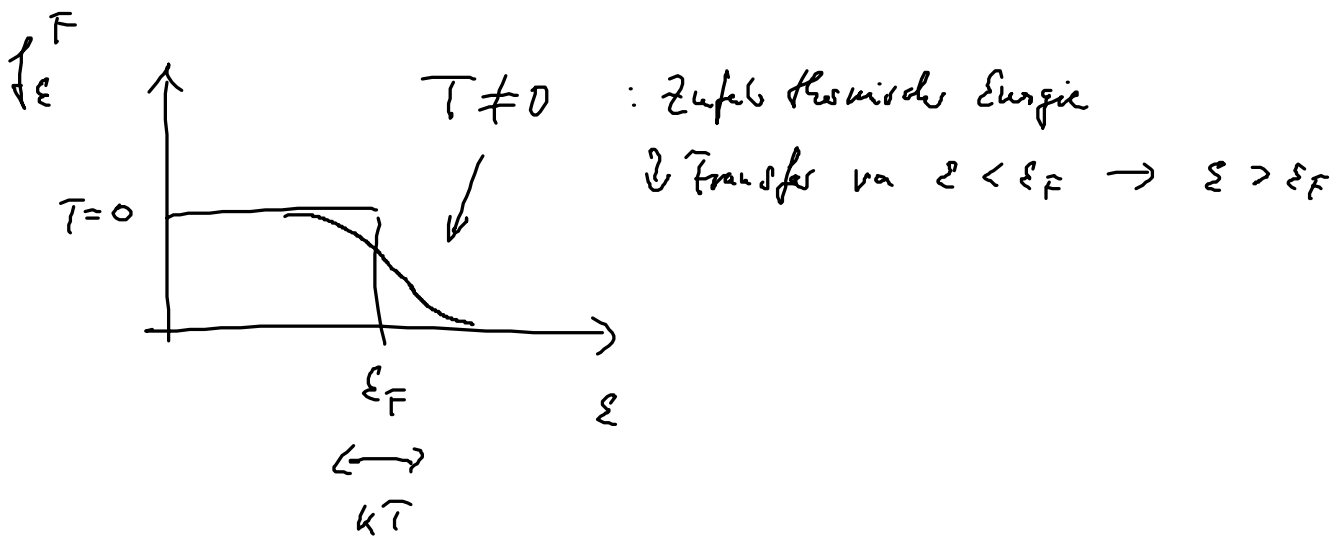
$$\epsilon_F = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m} n_0^{2/3} \approx n_0^{2/3}$$

Wenn u_0 wächst und damit N f. fest Volumen gilt:



(ii) $T \neq 0$ qualitativ

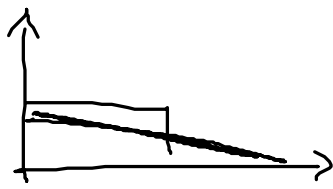
ausdahlende Diskussion



f. $T \neq 0$ wird z. Aufweichen d. Fermikante erwartet
 Größe ordnung kT .

hohe Temperatur: prinzipiell Maxwell-Boltzmann

Klassifizierung v. System nach Verhältnis von kT und ϵ_F :



$$\epsilon_F \ll kT$$

nicht entartetes Quantengas

„klassisch“



$$\epsilon_F \gg kT$$

entartetes Quantengas

„quantenmechanisch“

Beispiele • Metallniveau: $\epsilon_F \approx 1-10 \text{ eV}$, $kT \approx \frac{1}{40} \text{ eV}$

→ entartet, nichtklassisch

- Sterne: können entartet / nichtentartet.
(Verhältnis μ_0 und T entscheidend)

(iii) / $T \neq 0$ quantitativ

versucht jetzt $\mu = \mu(\mu_0, T \neq 0)$ zu berechnen

kommen v. Quantenlimit also diskontinua über Temperaturen

$\mu_0 = \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) \int_{\epsilon}^{\infty} f(\mu, T)$ und Sommerfeldmethode anwenden:

kleiner Parameter $\delta = \frac{kT}{\epsilon_F} \ll 1$, ein führen:

$$u_0 = \left(\int_0^\mu d\varepsilon \dots + \int_\mu^\infty d\varepsilon \dots \right) D(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

verwende: $1 - \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$

$$u_0 = \int_0^\mu d\varepsilon D(\varepsilon) 1 + \int_\mu^\infty d\varepsilon D(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} - \int_0^\mu d\varepsilon D(\varepsilon) \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

führe ein: $x = \pm \beta(\varepsilon - \mu)$ als Integrationsvariable

$$u_0 = \int_0^\mu d\varepsilon D(\varepsilon) + \int_0^\infty \frac{dx}{\beta} \frac{D(\mu + x/\beta)}{e^x + 1} - \int_0^\infty \frac{dx}{\beta} \frac{D(\mu - x/\beta)}{e^x + 1}$$

mit $+$ " mit $-$ "

nicht VL

$$\delta = \frac{kT}{\mu} = \frac{1}{\beta\mu} \quad \text{Klein voraussetzen}$$

dh. $\mu \gg x\beta$

Taylorreihe von beiden letzten Integralen: Kleine Größe

$$u_0 = \underbrace{\int_0^{\mu} d\varepsilon D(\varepsilon)}_{\text{ist das für } T=0} + \underbrace{0}_{\text{Nullte Ordnung}} + \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{dx}{\beta} \frac{D'(\mu)}{e^x + 1}}_{\text{Erste Ordnung}} \frac{2x}{\beta}$$

Erstordng. in klein große βx

$$D' \equiv \frac{\partial D(\mu)}{\partial \mu}$$

direkte Berechnung d. 2. Integral ist ungl.:

1. Integral $\int_0^{\mu} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} = \text{vorhin beschriftet}$

2. Integral $\int_0^{\infty} dx \times \frac{1}{e^x + 1} = \text{Zahl, Rest } \sim \frac{1}{\beta^2} \sim T^2$

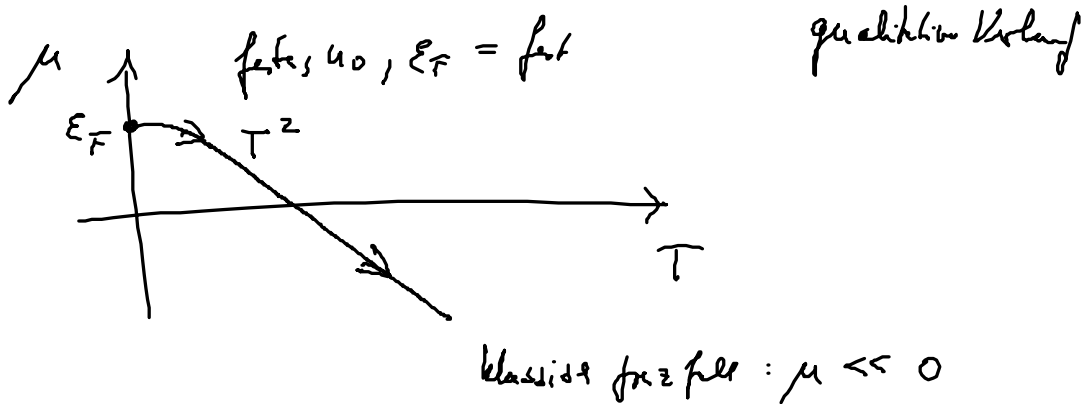
$$u_0 = u_0(\beta, \mu)$$

umstellt nach μ :

$$\mu = \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right)$$

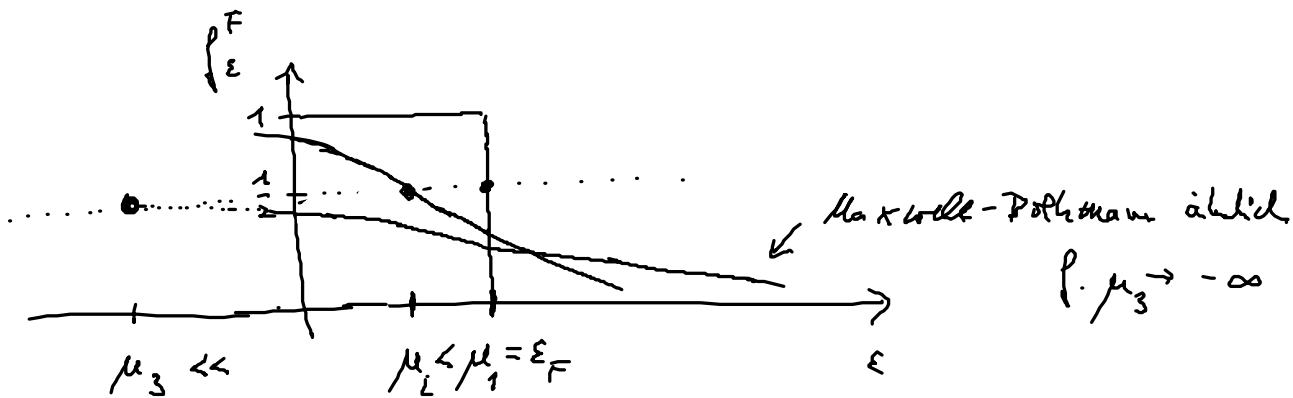
a) Korrektur d. chemisch Pot. f. $T \neq 0$, aber klein T

b) chemische Potential kann also ex. U. und
 negativ sein



Fermifunktion f. vereinf. chem. Pot.:

$$f_{\epsilon}^F = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad \text{mit} \quad f_{\epsilon = \mu}^F = \frac{1}{2}$$



Energie d. Elektronengases:

$$\frac{\bar{E}}{V} = \underbrace{W_{\bar{E}}}_{\text{Energiedichte}} = \frac{1}{V} \sum_k f_k^F \epsilon_k = \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) f_{\epsilon}^F \cdot \epsilon = \frac{\bar{E}_0}{V} + \text{Korrektur}$$

$\xrightarrow{T \rightarrow 0}$

$$W_E = W_E^0 + \frac{\pi^2}{6} D(E_F) T^2$$

$$W_E^0 = \mu_0 E_F \frac{3}{5} \quad \text{d.B.}$$

Spezifische Wärme:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \xrightarrow{T \rightarrow 0} \sim T$$

klassisch & ja: $C_V = \text{konst}$

dann ist verschieden.