

12.3. Ideales Fermigas

Modellsystem f. verschiedene Fermionen:

Elektronen in Festkörpern, Atomen

Nukleonen in Atomkernen

bestimmte Formen v. flüchtigen Helium, etc.

Analyse analog zum Bosogas:

chemische Zustandsgleichung gibt $\mu = \mu(\mu_0, T)$

Diskussion Fermi-Verteilung

Anwendungen

chemische Zustandsgleichung über Fermifunktion

$$\int_{\epsilon, s = \pm 1/2}^{\infty} \frac{g \epsilon^{\alpha} d\epsilon}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}$$

Fermi-Verteilung f. fest Spin (↑ ↓ f. Elektron)

↑
Fermi-Verteilung!

für nicht spin-abhängige $\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (freie Fermionen im periodischen Kristall)

gilt f. sich Spin unabhängig

gesucht: $\mu = \mu(u_0, T)$, $\varepsilon = \varepsilon_k$, $\int_{kT}^F = \int_{kT}^F$, $s = T, \downarrow$

aus: $\bar{N} = N = \sum_{k,s} \int_{kT}^F = 2 \sum_k \int_k^F$

$\approx \left\{ \begin{array}{l} \text{kontinuierlich} \\ \text{Zustand inkoh} \end{array} \right\} \sum_k \rightarrow \int dk \quad \left| \quad = 2 \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right) \int d^3k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1} \right.$

das ist $u_0 = u_0(\mu, T)$ wenn $u_0 = \frac{N}{V}$

sollte nach μ umgestellt werden

12.3.1. Einführung f. Zustand durch

für $\varepsilon_k = \frac{k^2 \hbar^2}{2m}$ sind Kugelkoordinaten sinnvoll

$N = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}$ ist 1d Integral

führen wir $\frac{N}{V} = u_0$ und off Integral hilft es über ε statt k zu berechnen

Transformation: $k \rightarrow \varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ε ist nun Variable

$k = \sqrt{2m\varepsilon} / \hbar$

$d\varepsilon = d\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) = \frac{\hbar^2 k}{m} dk = \frac{\hbar \sqrt{2}}{\sqrt{m}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$

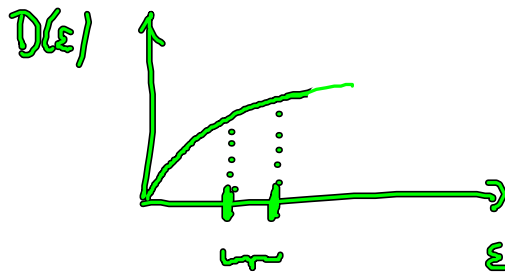
insgesamt:

$$n_0 = \frac{1}{\pi^2} \int_{\omega=0}^{\infty} dk k^2 f_k^F = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\frac{1}{\hbar} \sqrt{2}} \varepsilon^{-1/2} \varepsilon^{\frac{2n}{\hbar^2}} f_{\varepsilon}^F$$

$$n_0 = \int_0^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon) f_{\varepsilon}^F$$

Ein f. d. Zustandsdichte $D(\varepsilon) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\varepsilon^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \sqrt{\varepsilon}$

Beweis: a) $D(\varepsilon)$ heißt Zustandsdichte (Zustände pro Energie)



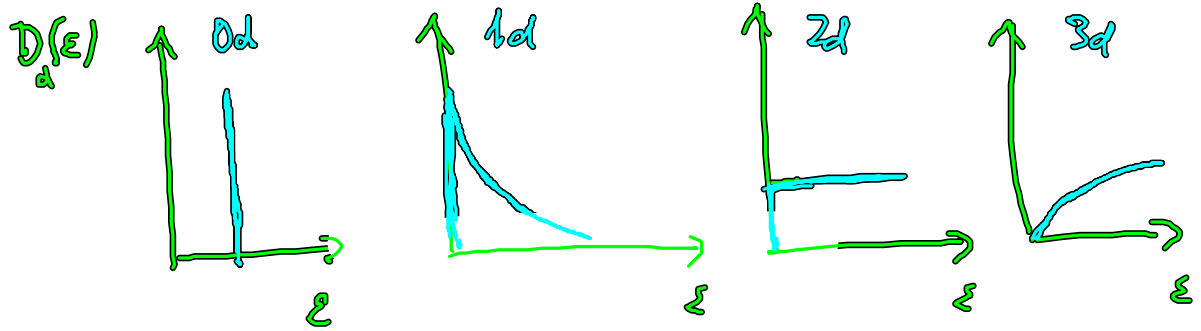
max Zahl d. Zustände

b) Wann: Anzahl d. Zustände ist gegeben durch

$$= \sum_{\vec{k}, s} 1 \rightarrow \int_0^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon)$$

Zustandsdichte Integration

c) Zustandsdichte hängt ab v. Raumdimension (0-Dimension)



wird in Festkörpersystem realisiert.

$$d) \quad n_0 = \int_0^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon) f_{\varepsilon}^{\bar{F}}(\mu, T)$$

ist implizit def. f. $\mu = \mu(n_0, T)$

um $f_{\varepsilon}^{\bar{F}}$ zu diskutieren $f_{\varepsilon}^{\bar{F}}(n_0, T)$

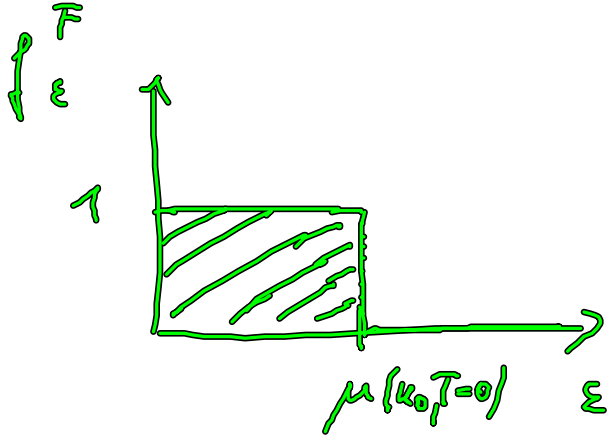
(f. n_0 klar, $T \rightarrow \infty$ sollte $\mu = \mu_{classisch}$)

12.3.2. Diskussion Temperatur

(i) $T \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty$: extremes Quantengrenzfall

$$f. \text{ fest Spin} \cdot f_{\varepsilon}^{\bar{F}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} = \begin{cases} 0 & \text{f. } \varepsilon > \mu, \text{ denn } e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \rightarrow \infty \\ 1 & \text{f. } \varepsilon < \mu, \text{ denn } e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Darstellg. f. $T \rightarrow 0$



Stufe fkt. $\theta(\mu - \epsilon)$

$\int_0^{\mu} f(\epsilon) d\epsilon$ bedeutet mitr. Zahl d. Elektronen in einem Zustand $|\epsilon\rangle$.

d.h. in jedem Zustand ist im Mittel 1 Elektron vorhanden bis zu Energie μ , μ Auffüllhöhe mit Elektronen bis μ : d.h. wenn alle Elektronen (n_0) verteilt ist, so lautet μ bei Energie μ .

das bedeutet:

$$n_0 = \int_0^{\infty} d\epsilon \mathcal{D}(\epsilon) \int_0^{\mu(u_0, T=0)} f(\epsilon) d\epsilon \stackrel{T \rightarrow 0}{=} \int_0^{\mu(u_0, T=0)} d\epsilon \mathcal{D}(\epsilon)$$

$\mathcal{D}(\epsilon)$ einsetzen

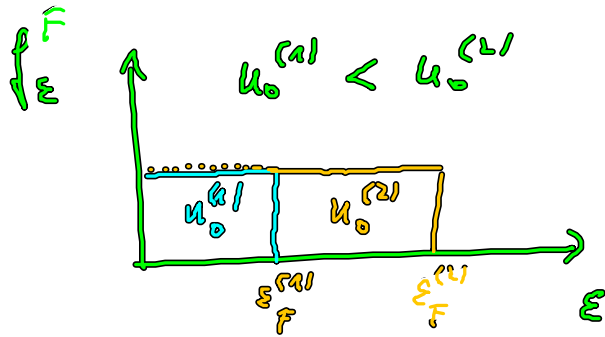
$$= \int_0^{\mu(u_0, T=0)} d\epsilon \sqrt{\epsilon} \frac{1}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} = \frac{1}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \left[\frac{2}{3} \epsilon^{3/2} \right]_0^{\mu}$$

$$n_0 = \frac{1}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{3 \hbar^3} \mu^{3/2}(u_0, T=0) = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \epsilon_F^{3/2} \quad (*)$$

" Fermi-Energie: $\mu(u_0, T=0) = \epsilon_F(u_0)$

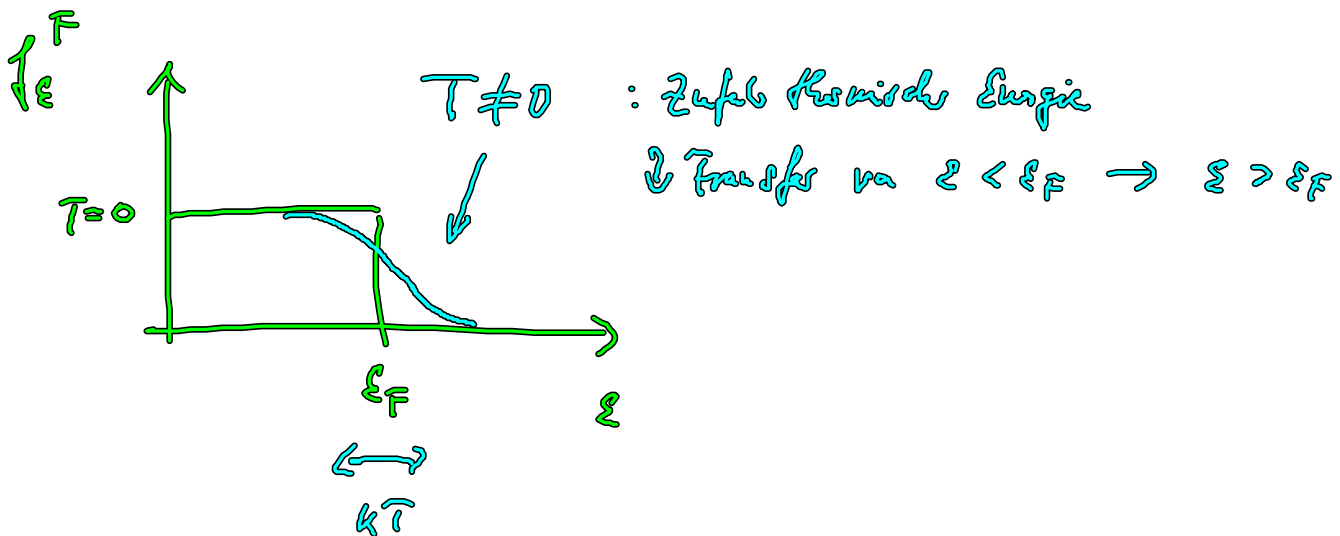
$$\epsilon_F = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m} n_0^{2/3} \sim n_0^{2/3}$$

Wenn μ_0 wächst und damit N f. fest Volumen gilt:



(ii) $T \neq 0$ qualitativ

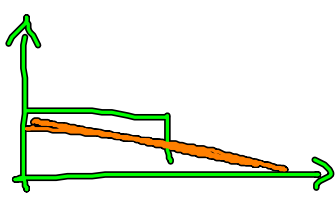
ausdeutlich Diskussion



f. $T \neq 0$ wird z. Aufweichen d. Fermikante erwartet
Größe ordnung kT .

hoch Temperatur: f. unvollst Maxwell-Boltzmann

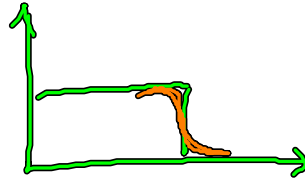
Klassifizierung v. System nach Verhältnis von kT und ϵ_F :



$$\epsilon_F \ll kT$$

nicht entartetes Quantengas

„klassisch“



$$\epsilon_F \gg kT$$

entartetes Quantengas

„quantenmechanisch“

Beispiele • Metallkohlen: $\epsilon_F \approx 10 \text{ eV}$, $kT \approx \frac{1}{40} \text{ eV}$

→ entartet, nichtklassisch

- Sterne: können entartet / nichtentartet.
(Verhältnis n_0 und T entscheidend)

(iii) / $T \neq 0$ quantisiert

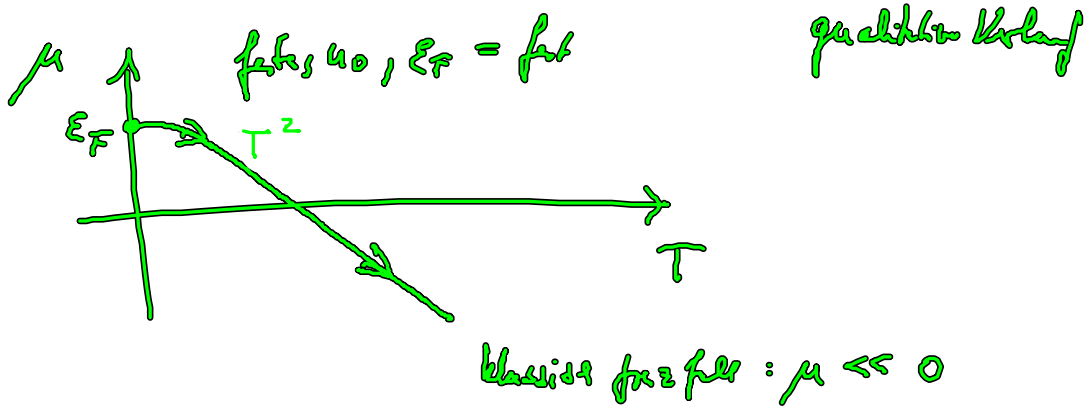
versucht jetzt $\mu = \mu(n_0, T \neq 0)$ zu berechnen

können v. Quantenlimit also dichtere bei Temperaturen

$n_0 = \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) f_{\epsilon}^F(\mu, T)$ und Sommerfeld methodisch ansuchen:

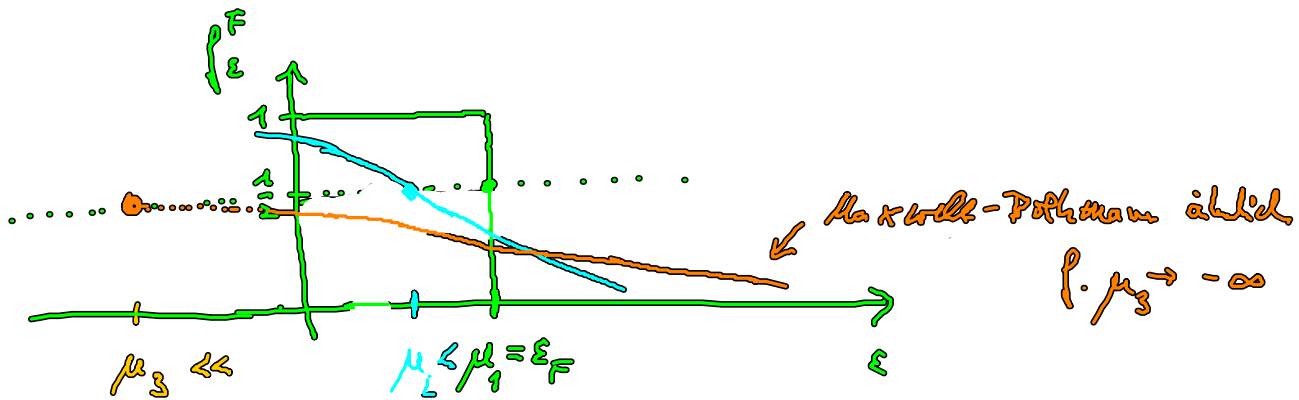
kleiner Parameter $\delta = \frac{kT}{\epsilon_F} \ll 1$, wir führen:

b) chemische Potenzial kann also eq. 4. and
 negativ sein



Fermifunktion f. realisiert chemisch. Potentiale

$$f_{\epsilon}^F = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad \text{mit} \quad f_{\epsilon = \mu}^F = \frac{1}{2}$$



Energie d. Elektronen:

$$\frac{E}{V} = \underbrace{W_E}_{\text{Energiedichte}} = \frac{1}{V} \sum_k f_k^F \epsilon_k = \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) f_{\epsilon}^F \cdot \epsilon = \frac{E_0}{V} + \text{Korrekturen}$$

$T \rightarrow 0$

$$W_E = W_E^0 + \frac{\pi^2}{6} D(E_F) T^2$$

$$W_E^0 = \mu_0 E_F \frac{3}{5} \quad \text{o.B.}$$

Spezifisch Wärme:

$$c_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_v \xrightarrow{T \rightarrow 0} \sim T$$

Klassisch & für: $c_v = \text{konst}$

dann hier verdrückt.