Nachtrag letzte VL:

$$\int_0^\mu d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

mit $x = -\beta(\varepsilon-\mu)$

$\Rightarrow dx = -d\varepsilon \cdot \beta$

Grenzen: $\varepsilon = 0 \rightarrow x = \beta\mu \rightarrow \infty \quad \left(\beta \sim \frac{1}{T}\right)$

$\varepsilon = \mu \rightarrow x = 0$

nur f. $\beta\mu \rightarrow \infty$ ergibt sich Integral aus VL, d.h. die Endformel ist Approximation und muß f. höhere Ordnungen überprüft werden.

12.4. Druck idealer Quantengase

Kapitel 5: Formel f. Druck $p = \frac{2}{3}\frac{E}{V} = \frac{2}{3} w_E$

w_E = Energiedichte

wenn kalorische Zstgl. gegeben ist, so folgt die thermische Zstgl.

diskutieren f. $T \rightarrow 0$, dort sollten Unterschiede zwischen Bosonen und Fermionen deutlich werden

a) Fermionen

$$p = \frac{2}{3} w_E \Big|_{T\to 0} = \frac{2}{3} w_E^0 \sim n_0^{5/3}$$

Druck wächst mit der Teilchendichte n_0

∃ Fermigegendruck bei Kompression der Materie ($n_0 \uparrow$)

≙ Grund f. Inkompressibilität v. flüssiger, fester Materie

Ursache: Unschärfe und Pauliprinzip

b) Bosonen

$$p = \frac{2}{3} w_E = \frac{2}{3} \frac{\sum_k \varepsilon_k f_k^B}{V} \Bigg|_{T\to 0 \text{ (Bosekondensation)}} = \frac{\varepsilon_0 N_0}{V}$$

$\frac{N_0}{V}$ = Dichte d. Kondensats = endlich

ε_0 niedrigster E-Zustand

im Kasten $L \to \infty$, $\varepsilon_0 \to 0$

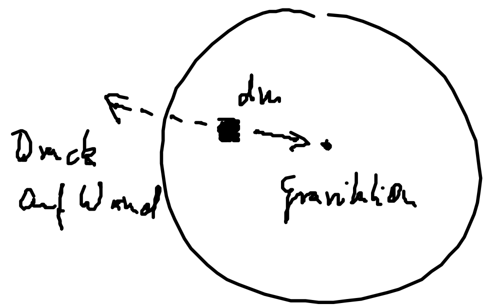
$$\Rightarrow p\big|_{T\to 0} = 0$$

Druck f. $T\to 0$ verschwindet im Bosongas,

alle Teilchen befinden sich im Impulszustand $k=0$.

Beispiel f. Fermidruck

naive Theorie f. Stabilität v. Sternen



Kugel, mit Gas gefüllt

dm Massenelement

Es existieren entartete u. nichtentartete Sterne

d.h. Fermidruck oder Druck klassisches Gas.

(Vergleich d. kT und μ)

Welche Energie liegen vor? Suche E-Minimum f. Stabilität!

a) Gravitation

$$E_{grav} = -\frac{G}{2}\int d^3r \int d^3r' \, \frac{n_0(\vec{r}\,')\, n_0(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

n_0: Massendichte

Stoffteilchendichte

$= \text{konstant}$

$= \frac{N^2}{V^2}$

$\vec{R}' = \vec{r} - \vec{r}\,'$

$$= -\frac{G}{2}\frac{N^2}{V^2}\underbrace{\int d^3r}\,\underbrace{\int d^3R' \, \frac{1}{|\vec{R}'|}}$$

$$= -\frac{G}{2}\frac{N^2}{V^{\cancel{2}}}\cancel{V}\;\; 4\pi \int_0^R dR' R'$$

Kugelkoordinaten

R - Sternradius

$$\sim R^2$$

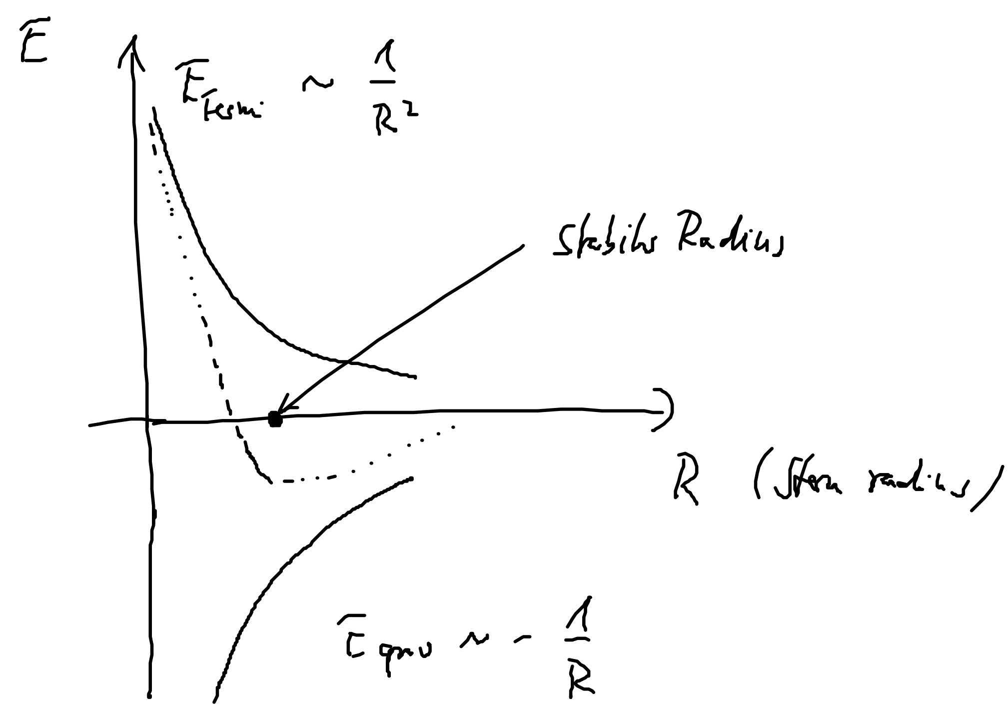
und $V \sim R^3$

$$\Rightarrow E_{grav} \sim -\frac{1}{R}$$

b) Druck im entarteten Gas

$$E_{Fermi} = V\, w_E = V \cdot \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, \varepsilon \Big|_{T \to 0} \sim n_0^{2/3} \sim \frac{1}{R^2}$$

$$\Rightarrow E_{Fermi} \sim \frac{1}{R^2}$$



Aus dem Gleichgewicht v. Fermidruck und Gravitationsdruck entsteht ein stabiles Gleichgewicht.

13 Masselose Bosonen

13.1. Beispiele und Definition

Beispiele: Photon, Phonone

- Photon sind Elementaranregungen d. elektromagnetischen Felds, Dispersionsrelation $\omega = \omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|$ und werden als Oszillatorquanten beschrieben

- Phonon sind kollektive Elementaranregungen des Ionensystems in Festkörpern / Molekülen, ebenso durch Oszillatorquanten beschrieben
  man spricht von kollektive Anregungen weil man stark gekoppelte Einzelsysteme (einzelne Ionen) als Anregungen kollektiver Koordinaten beschreibt.
  (schwach WW)

- warum masselos?

am Hamiltonian muß man Masse identifizieren können:

<u>Teilchengas</u>:
$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i}$$

Teilchen über Massen m_i abzählbar $\rightarrow$ Teilchenzahl N

<u>Oszillatorgas</u>:
$$H = \sum_{j=1}^{N} \hbar\omega_j\, a_j^+ a_j$$

Oszillatoren über Leiteroperatoren $a_j^{(+)}$

N: Anzahl d. Oszillatoren

es gibt aber auch Anzahl d. Quanten in jedem Oszillator,

können nicht über Massen abgezählt werden

jetzt: Anzahl d. Oszillatoren = fest gesetzt

betrachten jetzt Anzahl der angeregten Quanten als N

Def. f. masselose Bosonen über freie Energie $F = -kT\ln\left(e^{-\beta H}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial N} F(H) = 0 \rightarrow \mu = -\frac{\partial F}{\partial N}$$

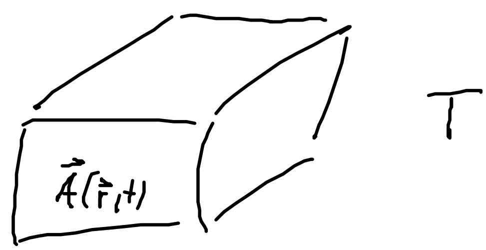
$\mu = 0$ f. masselose Bosonen

kanonisch Rechnung machen!

Bsp.: bei Photon wird die Zahl d. Quant d. Temperatur festgelegt.

13.2. Photon als Quant d. Strahlungsfelds

Photongas in Kasten



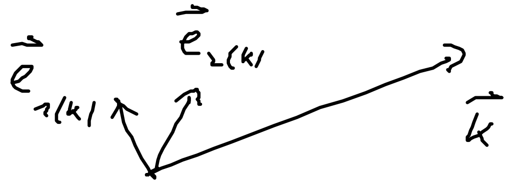
es gilt f. Strahlungsfeld in Vakuum die Gleichung f. Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$:

im Kasten: $$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = 0$$

$\vec{A}(\vec{r},t)$ als Superposition v. vollständigen Funktionensystem darstellen:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_n \underbrace{q_n(t)}_{\substack{\text{Zeit-}\\ \text{Koeffizienten}}} \underbrace{\vec{f}_n(\vec{r})}_{\text{vollständig}}$$

wähle: $$\vec{f}_n \rightarrow \vec{e}_{\lambda(k)} \cdot \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}$$ (ebene Wellen)



(ED)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda(k)=1}^{2} \underbrace{\vec{e}_{\lambda(k)} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}}_{\vec{f}_{k\lambda}} q_{k\lambda}(t)$$

Einsetzen in die Wellengleichung :

$$\sum_{\lambda,k} \left(i\vec{k}\cdot i\vec{k}\, q_{k\lambda}(t) - \frac{1}{c^2}\ddot{q}_{k\lambda}(t) \right) \vec{f}_{k\lambda} = 0$$

vollständiges System ⇓

$$\ddot{q}_{k\lambda}(t) + c^2k^2 q_{k\lambda}(t) = 0 \qquad \omega_k^2 = c^2k^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rightarrow \text{Oszillatorgleichung f. } q_{k\lambda}(t) : \\ \text{wird analog qm. Oszillator mit Leiteroperatoren quantisiert :} \\ H = \sum_{k,\lambda} \hbar\omega_{\lambda k}\left(a^+_{k\lambda} a_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right) \end{array}}$$

Hamilton f. Strahlungsfeld

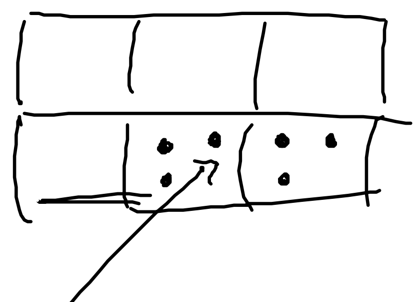
bosonische Oszillatoren : $[a_{k\lambda}, a^+_{k',\lambda'}]_- = \delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'}$

Achtg! Die Oszillatoren f. jede Mode stellen Amplitude des $\vec{A}$-Felds dar f. feste $\vec{k}, \lambda$.

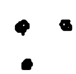
damit ist statistische Physik d. Strahlungsfeld aus H ableitbar.

13.3. Phonon als Quanten d. Ionengitters im Festkörper

periodische Anordnung v. Elementarzellen $\vec{r}_n$



$\vec{r}_n$: n-te Elementarzelle



In einer Zelle können p verschiedene Ionen (Atome sein

(nummeriert mit s oder t)

Ionen können um Ruhelage schwingen, Auslenkung sei $\vec{u}$

f. kleine Auslenkungen $\vec{u}$:

$$m_s \, \ddot{u}_s^{\alpha}(n) = -\sum_{\beta, t, m} K_{st}^{\alpha\beta}(n,m)\, u_t^{\beta}(m)$$ Rückstellkraft (linear)

Masse d. s-ten Ions

Auslenkung des s-ten Ions in Richtung α in der n-ten Zelle

$K_{st}^{\alpha\beta}(n,m)$ sind Kraftkonstanten, der Wirkung des t-ten Ions in Richtung β in m-ter Zelle auf $u_s^\alpha(n)$.

Auslenkung.

$\rightarrow$ es liegt ein verkoppeltes System von Oszillatoren vor

Idee: auf ungekoppelte Oszillatoren transformieren

Ansatz: $$u_s^\alpha(n) = \frac{1}{\sqrt{m_s N}} \sum_{\vec{k},\lambda} \underbrace{A_s^\alpha(\lambda,\vec{k})}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_n}\, \underbrace{q_{\vec{k}\lambda}(t)}$$

N: Zahl d. Elementarzellen — zu bestimmende Funktionen

$\vec{k}$: Wellenvektor — $q(t)$ ist zeitabhängig

λ: Modenindex — A^α: Vektorcharakter

einsetzen

$$\sum_{\vec{k},\lambda} \ddot{q}_{k\lambda}(t)\, A_s^\alpha(k,\lambda)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_n} = -\sum_{\substack{t,\beta\\ m}} \sum_{\lambda,k} \frac{K_{st}^{\alpha\beta}(n,m)}{\sqrt{m_t m_s}} A_t^\beta(k,\lambda)\, e^{i\vec{k}\vec{r}_m}\, q_{k\lambda}(t)$$

und $e^{i\vec{k}\vec{r}_n}$ ausklammern:

$$0 = \sum_{k,\lambda} \underbrace{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_n}}_{\text{vollständiges System}} \left(\ddot{q}_{k\lambda}\, A_s^\alpha(k,\lambda) + q_{k\lambda} \sum_{\substack{t,\beta\\ m}} \frac{K_{st}^{\alpha\beta}(n,m)}{\sqrt{m_t m_s}} A_t^\beta(k,\lambda)\, e^{i\vec{k}(\vec{r}_m-\vec{r}_n)} \right)$$

suchen Oszillatorgleichung f. $q_{k\lambda}(t)$:

$$\ddot{q}_{k\lambda} + \underbrace{\omega^2_{\lambda k}}_{\text{zu bestimmen}} q_{k\lambda} = 0$$

(i) Kraftkonstanten sind nur von $\vec{r}_n - \vec{r}_m$ abhängig

$$K(n,m) \to K(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$$

$$\text{mit } \quad K^{\alpha\beta}_{st}(\vec{k}) = \sum_{\vec{r}_m} K^{\alpha\beta}_{st}(\vec{r}_n - \vec{r}_m)\, e^{i(\vec{r}_n - \vec{r}_m)\vec{k}}$$

(ii) verwenden d. Oszillatorgleichung.

(iii) – " – der Vollständigkeit

$$\Downarrow \quad \boxed{\omega^2_{\lambda k}\, A^{\alpha}_{s}(k) = \sum_{t,\beta} \frac{K^{\alpha\beta}_{st}(k)}{\sqrt{m_s m_t}}\, A^{\beta}_{t}(k)} \quad \text{Matrix-Eigenwertproblem!}$$

Was ist gewonnen?

1.) $\omega_{\lambda k}$ kann über Eigenwertproblem f. $A^{\alpha}_{s}(k)$ gewonnen werden

damit auch $A^{\alpha}_{s}(k)$ als Eigenvektoren $\quad (\lambda \equiv \omega_{\lambda k})$

2) damit ist $q_{k\lambda}(t)$ über die Oszillatorgleichung bestimmt

Dimension der Matrix ist über t und β definiert, also: $3p$

p: Anzahl d. Ion in Zelle, nicht allzu groß

Damit kann das Phononsystem über Satz v. harmonischen Oszillatoren dargestellt werden:

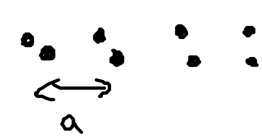
$$H = \sum_{k,\lambda} \hbar \omega_{\lambda k} \left(a^+_{k\lambda} a_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

analog zu Photon, aber $\hbar\omega_{\lambda k}$ noch unbekannt.

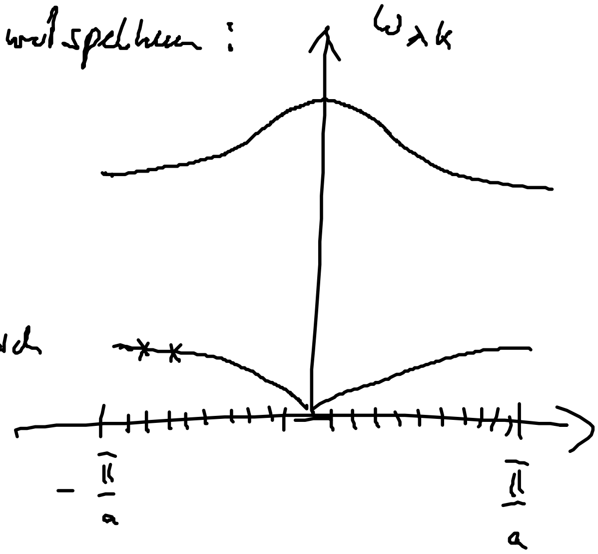
13.3.2. Phononen in Festkörpern

- es existieren $3p N_0$ ungekoppelte Oszillatoren

  N_0: Anzahl der Elementarzellen

- Experimentalphysik: 2atomige Kette:  eindimensional

– Eigenwertspektrum:



$p = 2 \rightarrow \lambda = 2$ „2 Moden"

$N_0 \hat{=}$ Anzahl der $\vec{k}$-Werte

– optische Moden koppeln an Licht: $\leftarrow\bullet \; \bullet\!\rightarrow$ über d. Dipol $\omega \approx$ Konstante f. kleine k

– akustische Moden $\bullet\!\rightarrow \; \bullet\!\rightarrow$ mit linearer Dispersion $\omega \approx v \cdot k$ – " –