Nachtrag letzte VL:

$$\int_0^\mu d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

mit $x = -\beta(\varepsilon-\mu)$

$\rightsquigarrow dx = -d\varepsilon \cdot \beta$

Grenzen: $\varepsilon = 0 \to x = \beta\mu \to \infty$ $\left(\beta \sim \frac{1}{T}\right)$

$\varepsilon = \mu \to x = 0$

nur f. $\beta\mu \to \infty$ ergibt sich Integral aus VL, d.h. die Endformel ist Approximation und muß f. höhere Ordnungen überprüft werden.

12.4. Druck idealer Quantengase

Kapitel 5: Formel f. Druck $p = \frac{2}{3}\frac{E}{V} = \frac{2}{3} w_E$

w_E = Energiedichte

wenn kalorische Zstgl. gegeben ist, so folgt die thermische Zstgl.

diskutiere f. $T \to 0$, dort sollten Unterschiede zwischen Bosonen und Fermionen deutlich werden

a/ Fermionen

$$p = \frac{2}{3} w_E \Big|_{T\to 0} = \frac{2}{3} w_E^0 \sim n_0^{5/3}$$

Druck wächst mit der Teilchendichte n_0

$\exists$ Fermigegendruck bei Kompression der Materie ($n_0 \uparrow$)

$\hat{=}$ Grund f. Inkompressibilität v. flüssiger, fester Materie

Ursache: Unschärfe und Pauliprinzip

b/ Bosonen

$$p = \frac{2}{3} w_E = \frac{2}{3} \frac{\sum_k \varepsilon_k f_k^B}{V} \Bigg|_{T\to 0 \text{ (Bosekondensation)}} = \frac{\varepsilon_0 N_0}{V}$$

$\frac{N_0}{V}$ = Dichte d. Kondensats = endlich

ε_0 niedrigster E-Zustand

im Limes $L \to \infty$, $\varepsilon_0 \to 0$

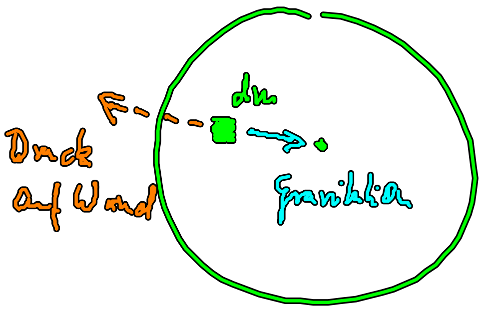
$$\Rightarrow p\big|_{T\to 0} = 0$$

Druck f. $T \to 0$ verschwindet im Bosongas,

alle Teilchen befinden sich im Impulszustand $k=0$.

Beispiel f. Fermidruck

naive Theorie f. Stabilität v. Sternen



Kugel, mit Gas gefüllt

dm Massenelement

Es existieren entartete u. nichtentartete Sterne

d.h. Fermidruck oder Druck klassischer Gase.

(Vergleich d. kT und μ)

Welche Energie liegt vor? suche E-Minimum f. Stabilität!

a/ Gravitation

$$E_{grav} = -\frac{G}{2}\int d^3r \int d^3r' \, \frac{n_0(\vec{r}\,')\, n_0(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

n_0: Massedichte, Stoffteilchendichte $=$ konstant $= \frac{N^2}{V^2}$

$\vec{R}\,' = \vec{r} - \vec{r}\,'$

$$= -\frac{G}{2}\,\frac{N^2}{V^2}\underbrace{\int d^3r}\,\underbrace{\int d^3R' \,\frac{1}{|\vec{R}\,'|}}$$

$$= -\frac{G}{2}\,\frac{N^2}{V^{\cancel{2}}}\,\cancel{V}\; 4\pi \int_0^R dR'\,R'$$

Kugelkoordinaten

R – Sternradius

$\sim R^2$

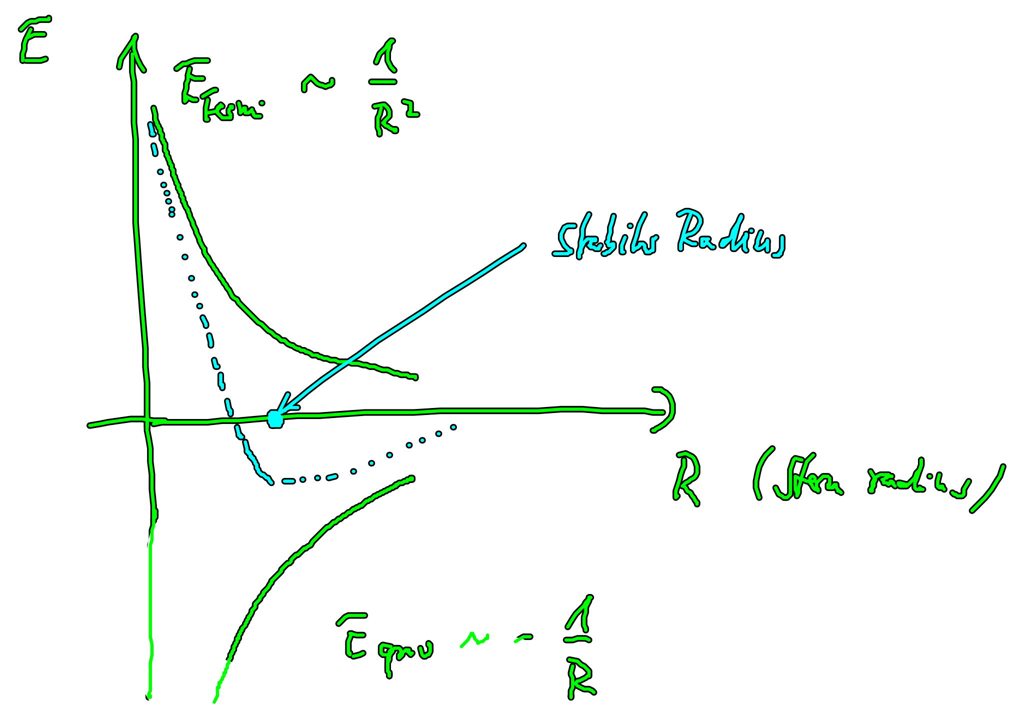
und $V \sim R^3$

$$\Rightarrow E_{grav} \sim -\frac{1}{R}$$

b) Druck im entarteten Fermigas

$$E_{Ferm.} = V\, w_E = V \cdot \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, \varepsilon \Big|_{T \to 0} \sim n_0^{2/3} \sim \frac{1}{R^2}$$

$$\Rightarrow E_{Ferm.} \sim \frac{1}{R^2}$$



Aus dem Gleichgewicht v. Fermidruck und Gravitationsdruck entsteht ein stabiles Gleichgewicht.

13 Masselose Bosonen

13.1. Beispiele und Definition

Beispiele: Photonen, Phononen

- Photonen sind Elementaranregungen d. elektromagnetischen Feldes, Dispersionsrelation $\omega = \omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|$ und werden als Oszillatorquanten beschrieben

- Phononen sind kollektive Elementaranregungen des Ionensystems in Festkörpern / Molekülen, ebenso durch Oszillatorquanten beschrieben
  man spricht von kollektiven Anregungen weil man stark gekoppelte Einzelsysteme (einzelne Ionen) als Anregungen kollektiver Koordinaten beschreibt.
  (schwache WW)

- warum masselos?

am Hamiltonian muß man Masse identifizieren können:

Teilchengas: $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i}$

Teilchen über Massen m_i abzählbar $\longrightarrow$ Teilchenzahl N

Oszillatorgas: $H = \sum_{j=1}^{N} \hbar\omega_j a_j^+ a_j$

Oszillatoren über Leiteroperatoren $a_j^{(+)}$

N: Anzahl d. Oszillatoren

es gibt aber auch Anzahl d. Quanten in jedem Oszillator,

können nicht über Massen abgezählt werden

jetzt: Anzahl d. Oszillatoren = fest gesetzt

behandeln jetzt Anzahl der angeregten Quanten als N

Def. f. masselose Bosonen über freie Energie $F = -kT \ln(e^{-\beta H})$

$$\frac{\partial}{\partial N} F(H) = 0 \longrightarrow \mu = -\frac{\partial F}{\partial N}$$

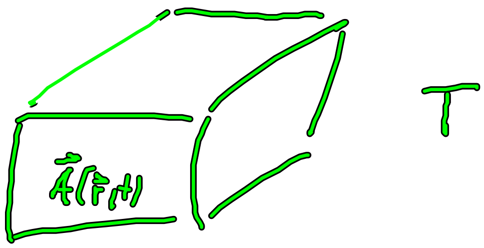
$\mu = 0$ f. masselose Bosonen

kanonisch Rechnung machen!

Bem.: bei Photon wird die Zahl d. Quanten
d. Temperatur festgelegt.

13.2. Photon als Quant d. Strahlungsfelds

Photongas in Kasten



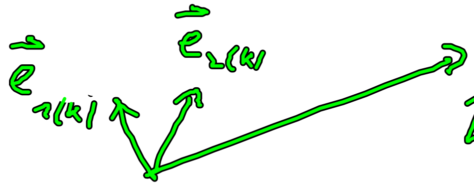
es gilt f. Strahlungsfeld im Vakuum die Gleichung f. Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$:

im Kasten: $\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} = 0$

$\vec{A}(\vec{r},t)$ als Superposition v. vollständigem Funktionensystem darstellen:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_n \underbrace{q_n(t)}_{\text{Zeit-Koeffizienten}} \underbrace{\vec{f}_n(\vec{r})}_{\text{vollständig}}$$

wähle: $\vec{f}_n \to \vec{e}_{\lambda(k)} \cdot \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}$ (ebene Wellen)



(ED)

$$\vec A(\vec r,t) = \sum_{\vec k}\sum_{\lambda(k)=1}^{2} \underbrace{\vec e_{\lambda(k)} \frac{e^{i\vec k\cdot\vec r}}{\sqrt V}}_{\vec f_{k\lambda}} q_{k\lambda}(t)$$

Einsetzen in die Wellengleichung:

$$\sum_{\lambda,k}\left(i\vec k\cdot i\vec k\, q_{k\lambda}(t) - \frac{1}{c^2}\ddot q_{k\lambda}(t)\right)\vec f_{k\lambda} = 0$$

vollständiges System ?

$$\ddot q_{k\lambda}(t) + c^2k^2\, q_{k\lambda}(t) = 0 \qquad \omega_k^2 = c^2k^2$$

→ Oszillatorgleichung f. $q_{k\lambda}(t)$:

wird analog qm. Oszillator mit Leiter Operatoren quantisiert:

$$H = \sum_{k,\lambda} \hbar\omega_{\lambda k}\left(a^+_{k\lambda} a_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right)$$

Hamiltonian f. Strahlungsfeld

bosonische Oszillatoren: $[a_{k\lambda}, a^+_{k'\lambda'}]_- = \delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'}$

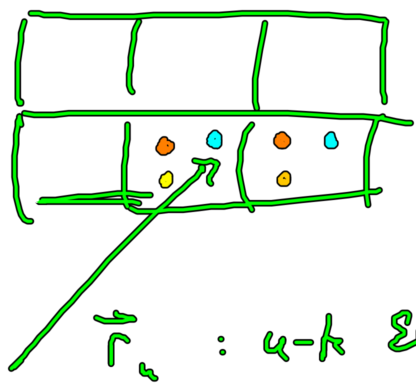
Achtg! Die Oszillatoren f. jede Mode stellen Amplitude des

$\vec{A}$-Feldes dar f. feste $\vec{k}, \lambda$.

damit ist statistische Physik d. Strahlungsfeld aus H ableitbar.

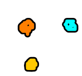
13.3. Phonon als Quanten d. Ionengitters im Festkörper

periodische Anordnung v. Elementarzellen $\vec{r}_n$



$\vec{r}_n$: n-te Elementarzelle

In einer Zelle können p verschiedene Ionen (Atome) sein



(numeriert mit s oder t)

Ionen können um Ruhelage schwingen, Auslenkung sei $\vec{u}$

f. kleine Auslenkungen $\vec{u}$:

$$m_s \ddot{u}_s^\alpha(n) = -\sum_{\beta, t, m} K_{st}^{\alpha\beta}(n,m)\, u_t^\beta(m)$$ Rückstellkraft (linear)

Masse d. s-ten Ions

Auslenkung des s-ten Ions in Richtung α in der n-ten Zelle

$K_{st}^{\alpha\beta}(n,m)$ sind Kraftkonstanten, die Wirkung des t-ten Ions in Richtung β in m-ter Zelle auf $u_s^\alpha(n)$.

Antisymmetrie.

→ es liegt ein verkoppeltes System von Oszillatoren vor

Idee: auf ungekoppelte Oszillatoren transformieren

Ansatz: $$u_s^\alpha(n) = \frac{1}{\sqrt{m_s N}} \sum_{\vec{k},\lambda} \underbrace{A_s^\alpha(\lambda,\vec{k})}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_n}\, \underbrace{q_{\vec{k}\lambda}(t)}$$

N: Zahl d. Elementarzellen

$\vec{k}$: Wellenvektor

λ: Modenindex

zu bestimmende Funktionen

$q(t)$ ist zeitabhängig

A^α: Vektorcharakter

Einsetzen

$$\sum_{\vec{k},\lambda} \ddot{q}_{k\lambda}(t)\, A_s^\alpha(k,\lambda)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_n} = -\sum_{\substack{t,\beta\\ m}} \sum_{\lambda,k} \frac{K_{st}^{\alpha\beta}(n,m)}{\sqrt{m_t m_s}} A_t^\beta(k,\lambda)\, e^{i\vec{k}\vec{r}_m} q_{k\lambda}(t)$$

und $e^{i\vec{k}\vec{r}_n}$ ausklammern:

$$0 = \sum_{k,\lambda} \underbrace{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_n}}_{\text{Vollständiges System}} \left(\ddot{q}_{k\lambda} A_s^\alpha(k,\lambda) + q_{k\lambda} \sum_{\substack{t,\beta\\ m}} \frac{K_{st}^{\alpha\beta}(n,m)}{\sqrt{m_t m_s}} A_t^\beta(k,\lambda)\, e^{i\vec{k}(\vec{r}_m - \vec{r}_n)} \right)$$

Suchen Oszillatorgleichung f. $q_{k\lambda}(t)$:

$$\ddot{q}_{k\lambda} + \underbrace{\omega_{\lambda k}^2}_{\text{zu bestimmen}} q_{k\lambda} = 0$$

(i) Kraftkonstanten sind nur von $\vec{r}_n - \vec{r}_m$ abhängig

$$K(n,m) \to K(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$$

$$\text{und} \quad K_{st}^{\alpha\beta}(\vec{k}) = \sum_{\vec{r}_n} K_{st}^{\alpha\beta}(\vec{r}_n - \vec{r}_m)\, e^{i(\vec{r}_n - \vec{r}_m)\vec{k}}$$

(ii) verwenden d. Oszillatorgleichung.

(iii) – " – der Vollständigkeit

$$\Downarrow \quad \boxed{\omega_{\lambda k}^2 A_s^\alpha(k) = \sum_{t,\beta} \frac{K_{st}^{\alpha\beta}(k)}{\sqrt{m_s m_t}} A_t^\beta(k)}$$

Matrix-eigenwertproblem!

Was ist gewonnen?

1.) $\omega_{\lambda k}$ kann über Eigenwertproblem f. $A_s^\alpha(k)$ gewonnen werden

damit auch $A_s^\alpha(k)$ als Eigenvektor $\quad (\lambda \equiv \omega_{\lambda k})$

2) damit ist $q_{k\lambda}(t)$ über die Oszillatorgleichung bestimmt

Dimension der Matrix ist über t und β definiert, also: $3p$

p: Anzahl d. Ionen in Zelle, nicht allzu groß

Damit kann das Phononsystem über Satz v. harmonischen Oszillatoren dargestellt werden.

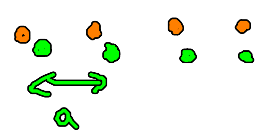
$$H = \sum_{k,\lambda} \hbar\omega_{\lambda k} \left(a^+_{k\lambda} a_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

analog zu Photon, aber $\hbar\omega_{\lambda k}$ noch unbekannt.

13.3.2. Phononen in Festkörpern

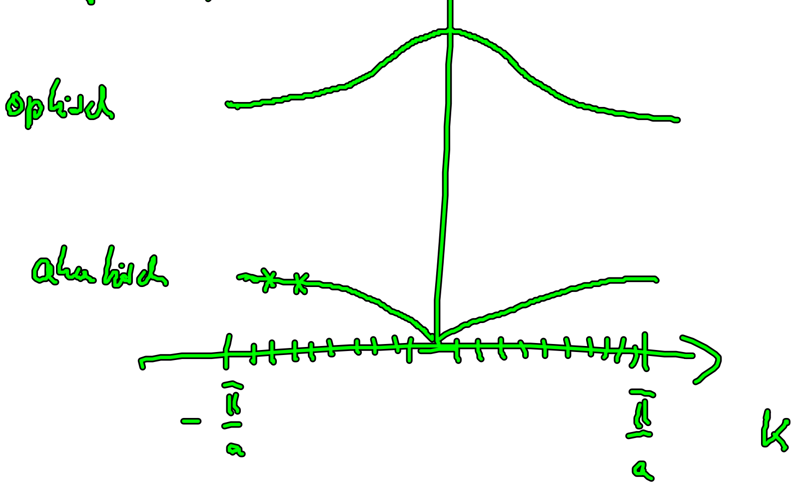
- es existieren $3p N_0$ ungekoppelte Oszillatoren

  N_0: Anzahl der Elementarzellen

- Experimentalphysik: 2atomige Kette: 

eindimensional

– Eigenwertspektrum:



$p = 2 \rightarrow \lambda = 2$, „2 Moden“

$N_0 \hat{=}$ Anzahl der $\tilde{k}$-Werte

– optische Moden koppelt an Licht : über el. Dipol $\quad \omega \approx$ konstant f. kleine k

– akustische Moden mit linearer Dispersion $\quad \omega \approx v \cdot k$ – " –