14. Oszillatoren: Photonen, Phononen als masselose Bosonen

Oszillator: $H = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right)$ in Leiterdarstellung

Eigenwertproblem: $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$, $|n\rangle$: $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

- Photonen, Phononen als Ansammlung unabhängiger Oszillatoren mit Modenindex $k \equiv (\vec{k}, \lambda)$ und $\omega = \omega_{k\lambda}$ als Dispersion
- zunächst allgemeine Behandlung, später Spezialisierung auf Photonen, Phononen

viele Oszillatoren $H = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \right)$

Eigenwertproblem: $E_n = \sum_{k=1}^{N} \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right)$, n_k: Besetzungszahl Mode k

$n = \{ n_k \}$ Verbundindex

$|n\rangle = |n_1, n_2 \dots n_k \dots n_N\rangle$ = Produktzustand

(analog d. nichtwechselwirkende Teilchen VL 1)

14.1. Zustandssumme f. 1 Oszillator

masselos, d.h. $\mu = 0$, kanonisch = großkanonische Rechnung

$$Z = \mathrm{sp}\left(e^{-\beta H}\right) = \sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle = \sum_n \langle n | n \rangle e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

E_n einsetzen $\Rightarrow$ $$Z = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega n}}_{\text{geometrische Reihe}} e^{-\beta \frac{\hbar\omega}{2}}$$

$$\boxed{Z = \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}$$ Zustandssumme eines harmonischen Oszillators

Potential ist freie Energie $F = -kT \ln Z$

$$\ln Z = -\frac{\beta\hbar\omega}{2} - \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

Bsp: Z enthält f. Energie, also kalorische Zustandsgl.

$$E = -\partial_\beta \ln Z = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{e^{-\beta\hbar\omega}\cdot\hbar\omega}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$\boxed{E = \underbrace{\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}} + \frac{\hbar\omega}{2}}$$ } Grundzustandsenergie

mittlere Energie eines Oszillators im Wärmebad

Interpretation: Energiequant mal Boseverteilung (mittlere Zahl v. Quanten)

Bemerkungen:

a) kalte Umgebung: $\beta \to \infty$, $T \to 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\hbar\omega}{2} = E$ = Grundzustandsenergie

Im Mittel ist das System mit Grundzustandsenergie ausgestattet

b) warme Umgebung: $\beta \to 0$, $T \to \infty$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \approx \frac{1}{1+\beta\hbar\omega-1} = \frac{kT}{\hbar\omega}$$

Taylor bis 1. Ordnung.

$\bar{E} \approx kT$

Im Mittel ist System mit thermischer Energie ausgestattet

Gleichverteilungssatz: klass. Grenzfall $\frac{1}{2}kT$ pro Freiheitsgrad (Ort, Impuls)

c) mittlere Zahl v. Quanten im Oszillator

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle a^\dagger a \rangle = \mathrm{sp}(\hat{n}\rho) = \sum_n \langle n | \hat{n} \frac{e^{-\beta H}}{Z} | n \rangle$$

Erwartungswert Teilchenzahl

$$= \sum_n n \frac{e^{-\beta \varepsilon_n}}{Z}, \quad \varepsilon_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

$$= -\frac{\partial_\beta}{\hbar\omega} \underbrace{\left(\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n} \right)}_{Z} \frac{1}{Z} - \frac{1}{2} \frac{\overbrace{\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}}^{Z}}{Z}$$

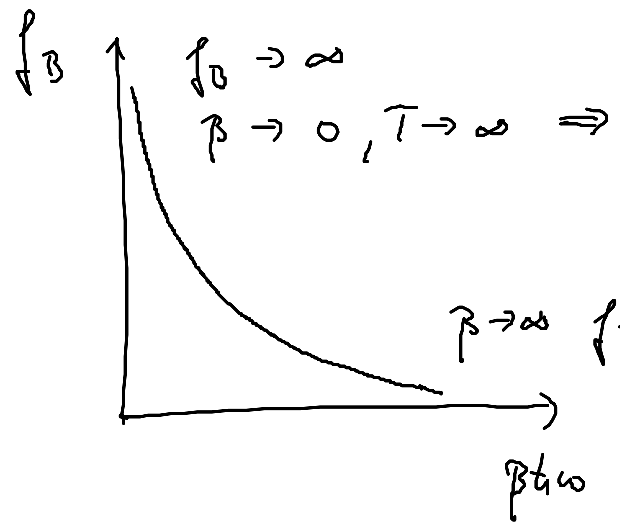
$$= \frac{-\partial_\beta}{\quad} \ln Z \qquad - \frac{1}{\quad}$$

$$\hbar\omega \qquad\qquad\qquad 2$$

$$= \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

Energie v. oben

Die mittl. Zahl d. Quanten $\langle \hat{n} \rangle$ ist gegeben durch Bosefaktor.



14.2. Zustandssumme f. viele Oszillatoren

$$Z = sp\left(e^{-\beta H}\right) = \sum_{\{n_k\}} \langle n_1 \cdots n_k \cdots n_N | e^{-\beta H} | n_1, n_2 \cdots n_k \cdots n_N \rangle$$

$$N \text{ Oszillatoren} \qquad \sum_{\{n_k\}} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_N}$$

$$= \sum_{\{n_k\}} \underbrace{\langle n_1 \cdots n_N | n_1 \cdots n_N \rangle}_{1} \, e^{-\beta\left\{\hbar\omega_1\left(n_1+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2\left(n_2+\frac{1}{2}\right) \cdots \hbar\omega_N\left(n_N+\frac{1}{2}\right)\right\}}$$

$$= \underbrace{\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega_1 (n_1+\frac{1}{2})} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega_2 (n_2+\frac{1}{2})}} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega_N (n_N+\frac{1}{2})}$$

zerfällt in 1 Oszillatorzustandssummen

$$= \prod_{k=1}^{N} Z_1(k) \underset{14.1.}{=} \prod_k \frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega_k}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}} = Z$$

$\hat{=}$ Z eines vielmodigen Oszillatorsystems

<u>Bsp</u>: kalorische Gleichung

$$E = -\partial_\beta \ln Z = -\partial_\beta \sum_k \ln\left(\frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega_k}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}}\right)$$

$$\underset{14.1.}{=} \sum_{k=1}^{N} \frac{\hbar\omega_k}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1} + \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2}$$

völlig analog 1 Oszillator, es werden N Oszillatoren addiert

14.3. Photonen

14.3.1. Zustandssumme

f. Photon bedeutet $k \longrightarrow \vec{k}, \lambda(\vec{k})$, d.h. Wellenzahl mit 2 mögl. Polarisation λ f. jede $\vec{k}$

$$\prod_{k} \longrightarrow \prod_{\vec{k}} \prod_{\lambda(\vec{k})} \qquad \text{und} \qquad \omega = c|k| \equiv \omega_k \qquad \text{(Kapitel 13)}$$

hängt nicht von λ ab

$$Z = \prod_{\vec{k}} \prod_{\lambda(\vec{k})} \frac{e^{-\beta\hbar\omega_k}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}}$$

λ hat 2 Werte f. jedes $\vec{k}$

$$\Rightarrow Z = \prod_{\vec{k}} \left(\frac{e^{-\beta\hbar\omega_k}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}} \right)^2$$

benötigen wieder $\ln Z$ f. kalorische Zustandsgleichung

$$\ln Z = -2 \sum_{\vec{k}} \ln\left(1-e^{-\beta\hbar c k}\right) - \underbrace{\sum_{\vec{k}} \beta\hbar c k}$$

<u>weglassen</u>, trägt nicht zu thermischer Zustandsgl. bei bzw. bei kalorischer nur die Grundzustands-E.

Kontinuierlicher Limes, großer Kasten:

$$\sum_{\vec{k}} \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$$

$$\ln Z = -2\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \ln\left(1-e^{-\beta\hbar c k}\right),$$ Kugelkoordinaten

$$= -\frac{2V\,4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\, k^2 \ln\left(1-e^{-\beta\hbar c k}\right),$$ Substitution $x=\beta\hbar c k$

$$= -\frac{V}{\pi^2}\underbrace{\frac{1}{(\hbar c\beta)^3}}_{\text{Substitution}}\underbrace{\int_0^\infty dx\, x^2 \ln\left(1-e^{-x}\right)}_{\text{Zahl (Bronstein)}}$$

$$\ln Z = \frac{\pi^2}{45}\frac{V}{(\beta\hbar c)^3}$$

$$\boxed{F = -kT\ln Z = -\frac{\pi^2}{45}\frac{V}{\beta^4}\frac{1}{(\hbar c)^3}}$$

freie Energie d. Photonengas

14.3.2. Auswertung d. Zustandssumme

a) kalorische Zustandsgleichung:

$$E = -\partial_\beta \ln Z = -\partial_\beta\left(\frac{\pi^2}{45}\frac{V}{[\beta\hbar c]^3}\right) = \frac{\pi^2}{15}\frac{V}{(\hbar c)^3}(kT)^4 \sim T^4$$

Energie d. Photongases ist proportional zu T^4:

(Stefan Boltzmann gesetz.), anders als beim idealen Gas $\sim T$.

b) thermische Zustandsgleichung:

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)\Big|_{T,\cancel{N}} = kT\,\partial_V \ln Z = \frac{1}{3}\frac{E}{V} = \frac{\pi^2}{45}\frac{1}{\beta^4 (\hbar c)^3}$$

masselose Gas:
$N = N(T)$,
N ist nicht unabhängig.

Das Photongas erzeugt ein Druck $p = p(T) \sim T^4$ auf Wand

(Sonnenstrahlung: $10^{-6}\,\frac{N}{m^2}$)

c) Plancksche Verteilung:

Suchen Energiedichte bezgl. Frequenz

Energie-dichte (pro Volume) $\rightarrow$

$$\frac{E}{V} = \int_0^\infty d\omega\, \underbrace{W_{Pl}(\omega)}$$

Energiedichte in Frequenzintervall $d\omega$

Start kalorische Zustandgleichung:

∞

$$E = -\partial_\beta \ln Z = \partial_\beta \frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty dk\, k^2 \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar c k}\right)$$

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk\, k^2 \frac{\hbar c k\, e^{-\beta\hbar c k}}{1 - e^{-\beta\hbar c k}}$$

Energiedichte

neue Variable: $\omega = ck$

$$= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{c^3} \int_0^\infty d\omega\, \omega^2 \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \int d\omega\, w_{pl}(\omega)$$

Verteilung d. spektralen E-Dichte d. Vergleich rechts/links

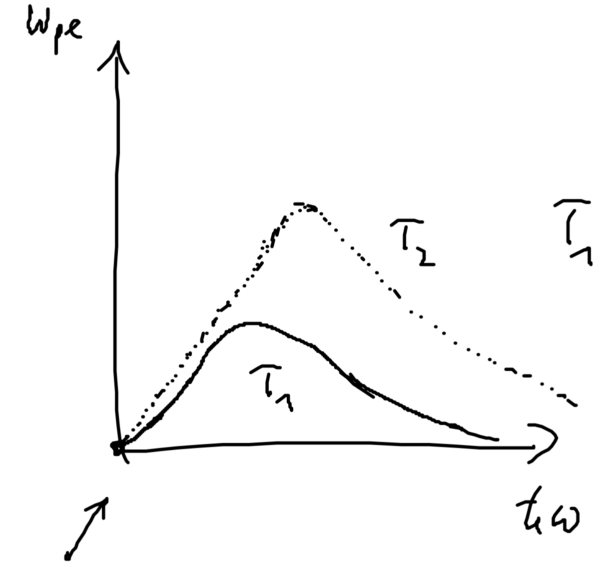
$$\boxed{\text{Planck'sche Verteilung = spektrale E-Dichte:} \quad w_{pl} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}}$$

Max Planck

– $w_{pl} = w_{pl}(T)$ kann gemessen werden

(frequenzauflösender Detektor)

– Skizze:



$T_1 < T_2$ (ÜA)

Anstieg $w_{pl} \sim \omega^2$

14.3.3. Anwendung d. Planckformel

a) Wiensches Verschiebungsgesetz:

$\omega_{max} = 2{,}8\, kT/\hbar$ ≙ Maximum verschiebt sich mit T

(Extremwertaufgabe) ⇒ Farbänderung d. T-Änderung

b) Rayleigh-Jeans-Gesetz:

$$w_{klassisch} = \frac{kT}{\pi^2}\frac{\omega^2}{c^3} \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \infty$$ „Ultraviolettkatastrophe"

ergibt sich aus

$$\underset{\substack{T\to\infty\\ \beta\to 0}}{w_{pl}} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\hbar\omega^3/c^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = \left| \begin{array}{c}\text{Taylor Nenner}\\ e^{\beta\hbar\omega}-1 \approx 1+\beta\hbar\omega-1\end{array}\right| = \frac{1}{\pi^2}\frac{\hbar\omega^3/c^3}{\beta\hbar\omega}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \frac{kT\omega^2}{c^3} \quad \checkmark$$

c/ Oberflächentemperatur v. strahlenden Körpern

Spektrum messen, Planck fitten $\to$ T bestimmen

Bsp. Sonne: 5600 K

d/ Kosmische Hintergrundstrahlung:

- ab bestimmtem Zeitpunkt d. Kosmos haben sich Materie + Strahlg. unabhängig entwickelt (Atome kondensiert, wenig freie Ladungsträger)

- ab diesem Zeitpunkt: freie Photonen

$\to E \sim V T^4$

wenn Ausdehnung d. Universums $\exists$ $V = V(t)$

so muß, da E = konstant sich T ändern $T = T(t)$

$V \uparrow \longrightarrow T \downarrow$

Expansion Temperatursenkung

Seit Zeitpunkt, wo Materie und Photon entkoppelt waren

→ wenn man Theorie hat $V = V(t)$, E.

→ man kann die heutige Temperatur berechnen

$$T = 2{,}73\,K$$ – Strahlung, experimentell beobachtet

e) Treibhauseffekt

Gesamtenergiehaushalt eines Systems

$E = \alpha T^4$ f. Photongas

prozentuale E-Erhöhung:

$$\underbrace{E_{alt} + 4\%\, E_{alt}}_{E\text{-Zuwachs}} \;\hat{=}\; \simeq \alpha \underbrace{(T_{alt} + \Delta T)^4}_{\text{Temperaturzuwachs}}$$

ΔT klein → Taylorreihe

$$E_{alt} + 4\%\, E_{alt} \approx T_{alt}^4 \left(1 + 4 \frac{\Delta T}{T_{alt}}\right)$$

$$4\%\, E_{alt} = 4\alpha\, \Delta T\, T_{alt}^3$$

$$4\% = 4 \frac{\Delta T}{T_{alt}} \approx \frac{\Delta T}{100\,K}$$ $= \Delta T$ in % und Kelvin

Tail 400k

pro % E-Zufuhr → 1k Erhöhung

(schlechtes Modell)