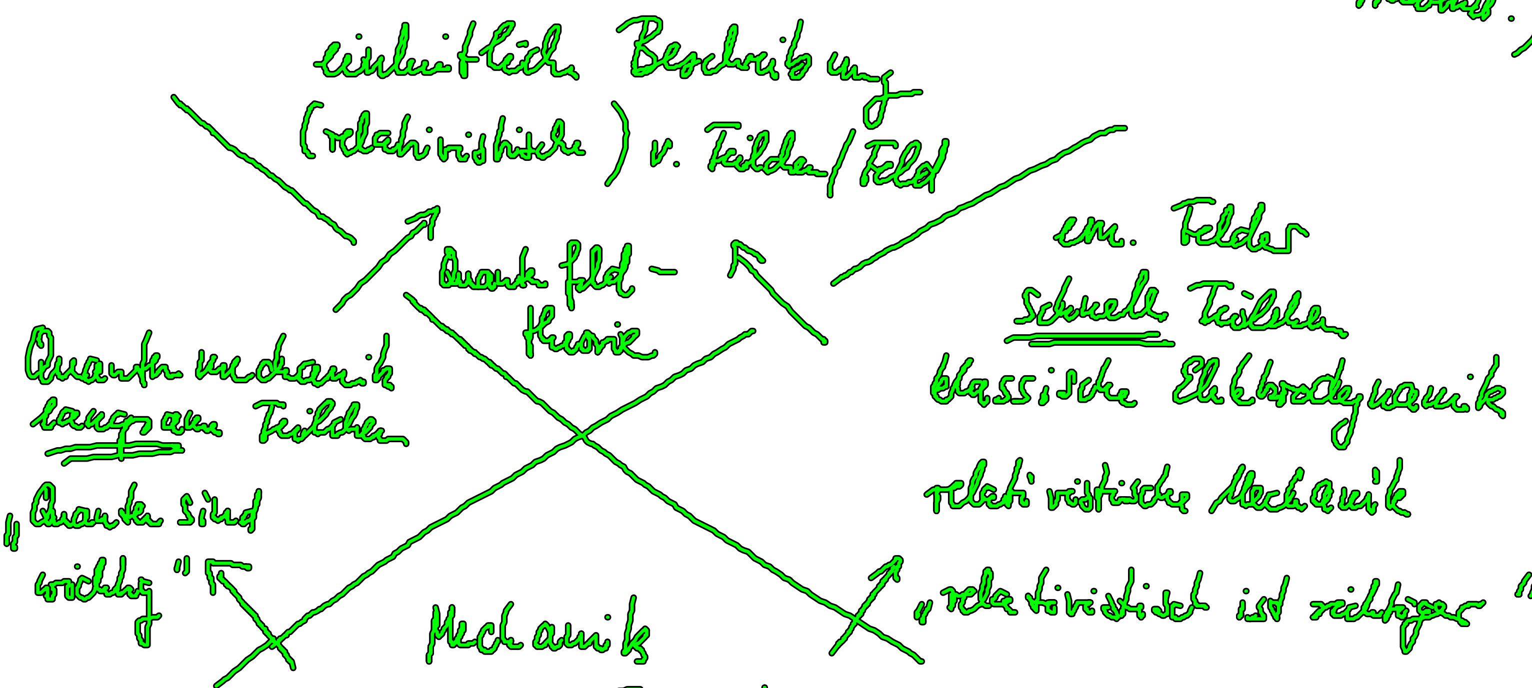
I') Wiederholung und das was wir machen

1.) Blick auf Struktur der Physik (hoch-trabend!)



Teilchen, Feld ≙ Begriffe

die statistische Physik als „Vielteilchenbeschreibung"
befindet sich „über" der Struktur

2.) Historische Kommentare zur Entwicklg. QM

M. Planck	(1858 - 1947)	Wirkungsquantum Schwarzkörperstrahlung
A. Einstein	(1879 - 1955)	Lichtquantenhypothese
N. Bohr	(1882 - 1962)	halbklassische Quantentheorie „Atommodelle"
A. Sommerfeld	(1868 - 1958)	
W. Heisenberg	(1901 - 1976)	Matrizenmechanik, Unschärferelation Feldquantisierung
E. Schrödinger	(1887 - 1961)	Wellenmechanik
W. Pauli	(1900 - 1958)	Spin - Statistik Theorem
P. Dirac	(1902 - 1984)	relativistische Verallg. Schrödingergl Spin $\frac{1}{2}$ abstrakte Formulierung QM
R Feynman	(1918 - 1988)	Quantenelektrodynamik

3) Die relativistische Energie-Impuls Beziehung

wenn Objekte $\frac{v}{c} < 1$ mit Geschwindigkeit v

in die Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit c

kommen:

$$E(p) = (m^2c^4 + c^2p^2)^{1/2} \cong \begin{cases} mc^2 + \frac{p^2}{2m} & f\ p \ll mc \\ cp & f\ p \gg mc \end{cases}$$

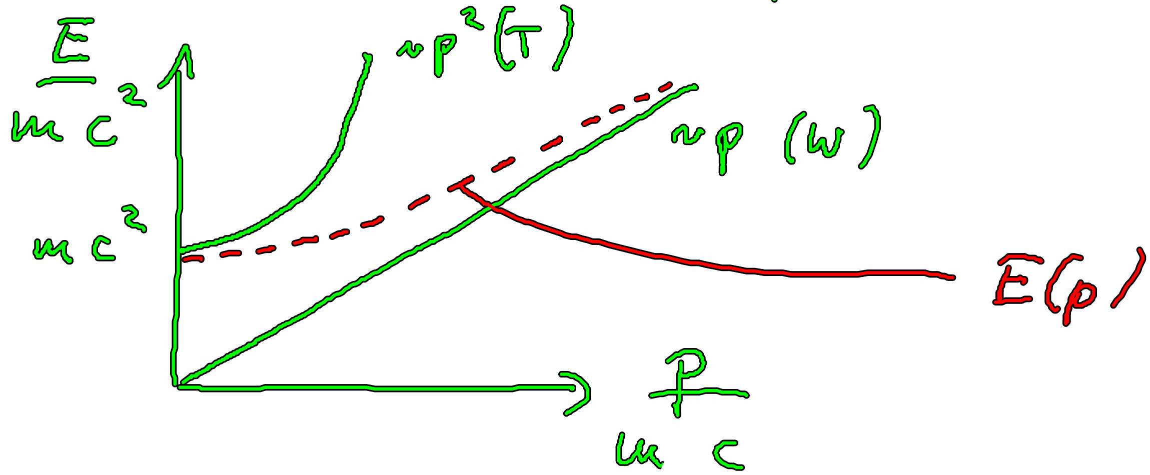
relativist. Energie-Impulsbeziehung

m - Ruhemasse, p - Impuls, E - Energie

- $\underline{\frac{p^2}{2m}}$ aus klassische, nicht relativist. Mechanik: Teilchen
- pc Welle, wenn: de Broglie $p = \hbar K$, $E = \hbar \omega$

—— Zshg. Welle - Teilchen Bild $\rightarrow$ $\omega = cK$

offensichtlich „interpoliert" $E(p)$ zwischen Welle / Teilchen



Eine <u>wirklich</u> einheitliche Beschreibung von Teilchen und Welle wird nur mit einer <u>relativistischen</u> $E(p)$ und <u>quantenmechanischen</u> Theorie mögl. sein

$E = \hbar\omega,\ p = \hbar k$

4.) Die beiden Bausteine: Quantenmechanik und Relativistik – eine kurze Wdh. der Begriffe

a) Axiome der Quantentheorie (Schrödinger Wellen)

1) Zustand eines Teilchens wird durch Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$ in einem linearen Vektorraum (Hilbertraum) beschrieben.

2) Observable sind hermitesche Operatoren $\{\underline{A}\}$.

3) QM hat statistische Interpretation, Mittelwert von $\underline{A}$ ist im Exp. mit

$$\langle \underline{A} \rangle = \int d^3r\, \Psi^*(r,t)\, \underline{A}\, \Psi(r,t)$$

4.) Die Zeitentwicklung (Dynamik) ist durch Schrödingergleichung festgelegt

$$i\hbar\, \partial_t \Psi = \underline{H}\, \Psi \quad , \quad \underline{H} - \text{Hamiltonoperator}$$

5.) Bei einer Messung von $\underline{A}$ geht der ursprüngliche Zustand Ψ in einen Eigenzustand $\varphi_n(r)$ von $\underline{A}$ über $\left(\underline{A}\, \varphi_n = a_n\, \varphi_n \right)$

b) Relativistische Beschreibung

1) Raum und Zeit werden verknüpft:
Lorentztransformation zw. Inertialsystemen

2) für Verknüpfung werden mathematisch 4er Vektoren eingeführt:

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \quad (1 \text{ Ereignis}) = (ct, x, y, z)$$

$\mu : (0 \cdots 3)$ griechisch

$i : (1 \cdots 3)$ latein

$$x_\mu = (ct, -\vec{r}) = (ct, -x, -y, -z)$$

$$(x, y, z) \overset{\hat{=}}{\rightarrow} (x_1, x_2, x_3)$$

3) Eigenzeitintervall $d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$

ist invariant in verschiedenen Inertialsystemen

eine Ereigniskurve muß als Funktion von τ

$$x^\mu(\tau) = (ct(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))$$

4) Definition des Impulses als Fkt von τ

$$p^\mu = m \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau)$$, $d\tau$ einsetzen

$$= \underbrace{\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \frac{d}{dt} (ct, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

$$p^\mu(t) = (m(t)\, c, m(t)\, \dot{x}_1, m(t)\, \dot{x}_2, m(t)\, \dot{x}_3(t))$$

5) p_0 (erste Komponente) wird mit $\frac{E}{c}$ identifiziert

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \quad \text{also: } \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c} \quad *$$

6) Ein 4er Vektor hat eine Länge die invariant beim Wechsel d. KS

Betragsquadrat: $p_\mu p^\mu = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$

Summenkonvention

des Impulsvierervektors

7) Relativistische Energie-Impulsbeziehung:

$$p_\mu p^\mu = \underline{\underline{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2}}} = \underbrace{\overset{*}{\frac{m^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m^2 \gamma v^2}_{\underline{\underline{m^2c^2}}}$$

$\rightarrow$ umstellen nach E:

$$E(p) = \left(m^2c^4 + p^2c^2\right)^{1/2}$$

5) <u>Ausblick</u>

- Verallgemeinerung Schrödingergleichung
auf relativistische Gleichungen, Folgerungen

- Grenzfall $\frac{v}{c} \ll 1 \longrightarrow$ relativistische
Korrekturen, z.B. Spin-Bahn

- Einteilchentheorie: Struktur Materie
Feld-Materie Wechselwirkung
Streutheorie
- Vielteilchentheorie: Elektronengase

- Quantenfeldtheorie || fundamentale WW (?)

II Relativistische Wellengleichungen

Schrödingergl. kann nur nicht relativistisch sein:

$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi$$

1. Ordnung

2. Ordnung $\Longrightarrow$ Raum und Zeit sind

unfair behandelt

2 Wgl.
zur relativist.
Beschreibung

spendieren
einer weiteren
Zeitableitung

↓

Klein-Gordon
Gleichung
(spin 0)

weglassen einer
Ortsableitung

↓

Diracgleichung
(spin $\frac{1}{2}$)

1) Die Klein-Gordon Gleichung

1.1.) Die Herleitung geht schnell:

Schrödinger gl. aus $E = \frac{p^2}{2m}$ mit

$$\underbrace{E \to i\hbar\partial_t \,, \quad \vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}}$$

$$i\hbar\partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 \psi$$

nehmen wir doch einfach ein relativistisches $E(p)$

$$E^2 = (p^2c^2 + m^2c^4)$$

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4\right)\psi$$

$$\boxed{\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\vec{r},t) = 0}$$

Diese Gleichung ist die Klein-Gordon-Gleichung für ein relativistisches Teilchen, ist Standard-Wellengleichung mit Masseterm

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi(x^\mu) = 0$$

kovariante Schreibweise