Klein Gordon Gleichung: $\left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right) \psi(x^\mu) = 0$

$\underline{\partial_\mu} \, \partial^\mu = \underline{(\partial_{ct}, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})} \cdot (\partial_{ct}, -\partial_{x_1}, -\partial_{x_2}, -\partial_{x_3})$

$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$ Compton-Wellenlänge

1.2. Kontinuitätsgleichung der K-G-Gl.

Erinnerung bei Schrödingergleichung

$\rho = |\psi|^2 \rightarrow$ Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte

$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*\right)$

Wahrscheinlichkeitsstrom $\vec{j}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$

$\Rightarrow$ Schrödingertheorie als statistische Theorie die Wahrscheinlichkeitsaussagen macht

wie sieht das bei K.G.Gl. aus?

$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \lambda_c^{-2}\right) \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad | \psi^* \cdot$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \lambda_c^{-2})\, \psi^*(r,t) = 0 \quad | \, \psi\cdot$$

mit ψ^* bzw ψ multiplizieren
und voneinander abziehen

$$(\psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi - \psi \partial_\mu \partial^\mu \psi^*) = 0$$

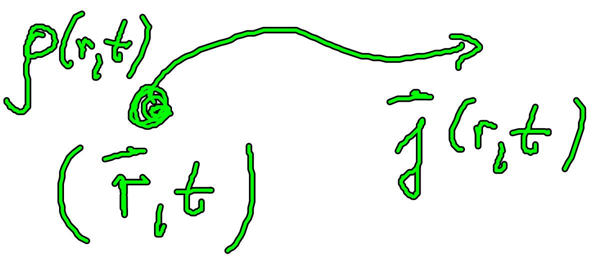
$$\partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi) - \partial_\mu (\psi \partial^\mu \psi^*) = 0$$

multiplizieren mit $\frac{\hbar i}{2m}$ und mit ∂_μ entmachen

$$\partial_t \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right)$$

$$-\vec{\nabla} \cdot \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*\right) = 0$$

Form einer Kontinuitätsgleichung: $\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$



$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*\right)$$ Bedeutg. klarmachen

im Vgl. zur Schrödinger-Theorie sieht $\rho(\vec{r},t)$ anders aus

($\rho = |\psi|^2 > 0 \rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsinterpretation)

ρ in der KG-Theorie: kann nicht als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, weil $\rho, \dot{\rho}$ können zu einem festen Zeitpunkt unabhängig gewählt werden und daher $\rho < 0$ mögl. $\rightarrow$ schlecht

Idee: Ladungsdichteinterpretation

$\longrightarrow$ relativist. Theorie sagt „Ladung" voraus

Feldth. !

1.3 Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung

a) Wellengleichung kann die vollständige Lsg. nach Elementarwellen entwickelt werden: („ebene Welle")

$$\psi(r,t) = \sum_p A(p)\, \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - E(p)t)}}_{\text{ebene Welle mit Wellenzahl } k\hbar = p,\ \omega\hbar = E(p)}$$

$$E = E(p) \quad (\omega = \omega(k))$$

ist die Dispersionsrelation der KG-Wellen

ebene Welle einsetzen:

$$-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{1}{c^2}\frac{E^2}{\hbar^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = 0$$

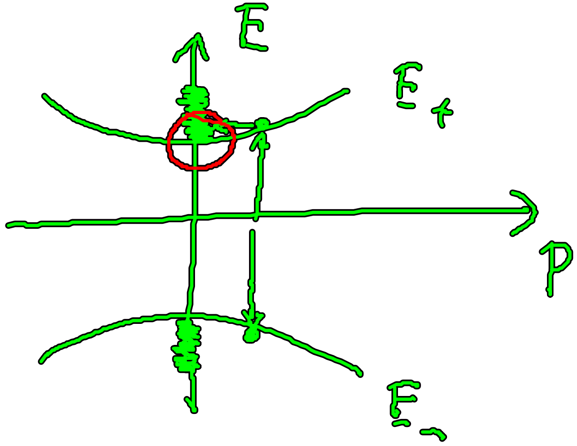
$$\to E = \pm\, \underline{\underline{c\left(p^2 + m^2c^2\right)^{1/2}}} = \pm\, \underline{\underline{E(p)}}$$

2 Lösungen: $\psi_\pm$

a) Sind das vielleicht positive oder negative Teilchen? → ja!

b) in Schrödinger Theorie war E die Energie
gibt's eben negative Energien? → gibt's hier nicht!

1.4. Ladung von Teilchen/Antiteilchenpaar, neutrale Teilchen



O Welt der Schrödinger-gleichung, der Rest ist neu

Sieht man durch Entwicklung von $E_+(p)$ für kleine p

Idee: Ladungsinterpretation

multiplizieren ρ mit $e > 0$

$$\rho \to \rho e = \frac{i\hbar e}{2mc^2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right)$$

ρ hat Dimension einer Ladungsdichte

q = Ladung des Teilchens muß $q_\pm = \int d^3r\, \rho e$

nehmen ψ_+, ψ_- und setze die in $q_\pm$ ein!

$$e^{-i\frac{E(p)}{\hbar}t} \qquad e^{+i\frac{E(p)}{\hbar}t}$$

$$(E_+) \qquad (E_-)$$

$$q_\pm = \pm \frac{e}{mc^2} \left|A_\pm(p)\right|^2 c\left(p^2 + m^2c^2\right)^{1/2} L^3$$

$\int d^3r$

Offensichtlich beschreibt φ^+ ein Teilchen mit Ruhemasse m und der Ladung $q_+ > 0$,

φ_- beschreibt ein Teilchen mit m aber $q_- < 0$.

So etwas nennt man Teilchen, Antiteilchen paar.

Indiz: jede relativist. Theorie ist eine Vielteilchentheorie
die Einteilchen beschreibg. ist nicht wirklich zu retten

Normierung der Wellenfunktion kann folgendermaßen festgelegt werden

q wird festgehalten und dann die Gleichung für

$q_\pm$ und A umgestellt (*)

$$A_\pm(p) = \Big(\underbrace{\frac{|q_\pm|}{e}}_{\text{Anzahl der Ladungen}} \; \frac{m c^2}{E(p) L^3} \Big)^{1/2}$$

Das neutrale Teilchen läßt sich als Überlagerung von $\pm$ Teilchen darstellen:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_+(p) + \psi_-(-p) \right)$$

neutral

$$= \left(\frac{mc}{2L^3 E(p)} \right)^{1/2} 2 \cos\left(\{ \vec{p} \cdot \vec{r} - E(p)\, t \} / \hbar \right)$$

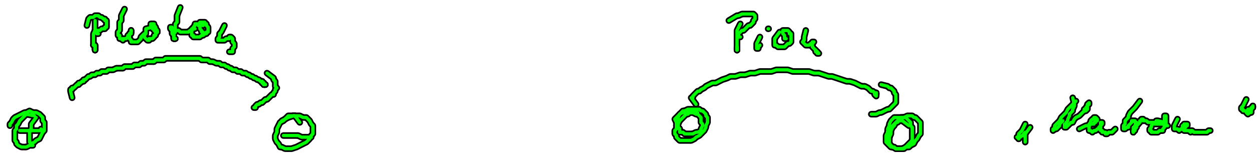
Wenn Sie Lust haben setzen Sie alle Lösungen auch in j, ρ ein und sehen daß sie sinnvolle Ergebnisse erhalten.

Weil wir keinen weiteren Freiheitsgrad außer der Ladung finden, beschreibt die Klein-Gordon Gl. offensichtlich den Spin 0.

1.5. Pionen

Triplett von Pionen (π^+, π^-, π^0)

Yukawa (1935) versucht damit Kernkraft zwischen Nukleonen im Kern zu erklären

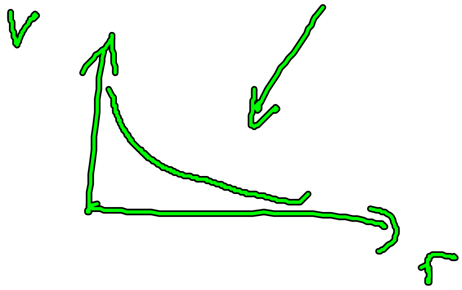


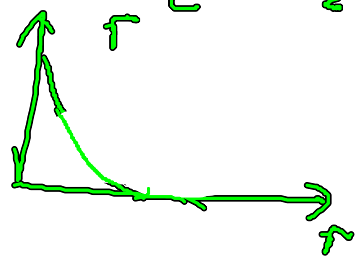
Elektromagn. Kraft $\quad\quad$ Kernkräfte

$\downarrow$

$\frac{1}{r}$ „langreichweitiges Potential" $\quad\quad$ kurzreichweitig!

$\frac{1}{r} e^{-r/\lambda_c}$





stationär: $\partial_t \to 0 \quad\quad (\Delta - \lambda_c^{-2})\psi = 0$

$\lambda_c^{-2} \neq 0 \xrightarrow[\text{masse} \neq 0]{}$ Pionpotential

$\lambda_c^{-2} = 0 \longrightarrow$ elektrisches Potential $\frac{1}{r}$

1.6. Energie von Teilchen und Antiteilchen

Schrödingertheorie formuliert $\underline{H}\,\varphi_n = \varepsilon_n\,\varphi_n$ und sagt ε_n sind mögl. Energien, bei KG-Gl.$_n$ besitzen wir noch keinen Hamiltonian.

Idee: besorge uns die Hamiltondichte über Lagrangeformalismus f. Felder:

a) Raten einer Lagrangedichte

2 Felder: ψ, ψ^*, weil komplex

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\nu \psi^*)$$

geraten $\nearrow$
$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m}\left(\eta^{\mu\nu}(\partial^\mu \psi^*)(\partial^\nu \psi) - \lambda_c^{-2}\psi^*\psi\right)$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$ Minkowskitensor

b) <u>Bestätigen der Lagrangedichte durch Bestätigen der KGG</u>

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi^*)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0$$ ähnlich Lagrange in Punktmechanik

einsetzen von geratenem $\mathcal{L}$

$$\partial^\mu\left(\eta^{\mu\nu}\partial^\nu \psi\right) + \lambda_c^{-2}\psi = 0$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \psi + \lambda_c^{-2}\psi = 0 \quad \checkmark$$

stimmt also und $\mathcal{L}$ kann benutzt werden um $\mathcal{H}$ (Hamiltondichte) zu bestimmen

c) <u>Hamiltondichte berechnen, mit Energie identifizieren</u>

$$\mathcal{H} = \underline{\Pi_\psi \partial_0 \psi} + \underline{\Pi_{\psi^*} \partial_0 \psi^*} - \underline{\mathcal{L}}$$

$$\Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi} \; , \quad \Pi_{\psi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi^*}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \partial^0 \psi^* \qquad = \frac{\hbar^2}{2m} \partial^0 \psi$$

$$(\partial^0 = \partial_0)$$

$$\rightarrow \mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\underline{2 \partial_0 \psi \partial_0 \psi^*} - (\underline{\partial_0 \psi \partial_0} \psi^* - \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \underline{\lambda_c^{-2} \psi^* \psi}) \right)$$

nimmt Index runter

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\partial_0 \psi \partial_0 \psi^* + \partial_i \psi \partial_i \psi^* + \lambda_c^{-2} \psi^* \psi \right)$$

→ entspricht der Energiedichte

ψ_+, ψ_- einsetzen und über $\int d^3r$ integrieren

ergibt die Energie $H_\pm$ der Teilchen

$$H_\pm = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3r \underbrace{\frac{|q_\pm|}{e} \frac{mc^2}{E(p) L^3}}_{A_\pm^2(p)} \left(\frac{(\pm E(p))^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{p_\pm^2}{\hbar^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right)$$

$$= \frac{|q_\pm|}{e} E(p) > 0$$

Teilchen und Antiteilchen Lösungen der KG-Gl
haben eine Energie > 0, $E_{\pm}$ sind nur Parameter
die $\psi_{\pm}$ kennzeichnen.

1.7. Teilchen / Antiteilchen - Wolken

relativist. Theorie ist eine Vielteilchentheorie:

$\ominus$ q Pion (Spin 0 Teilchen)

$\oplus$ Kern

Teilchen befindet sich in Potential ϕ

$$\left.\begin{array}{lcl} i\hbar\partial_t & \longrightarrow & i\hbar\partial_t - q\phi \\ \vec{p} & \longrightarrow & \vec{p} - q\vec{A} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Teilchen im}\\ \text{ein Feld}\\ (\phi, \vec{A})\end{array}$$

$$\left(i\hbar\partial_t - q\underset{\uparrow\ \text{statisches Potential}}{\phi}\right)^2\psi = -c^2\hbar^2\vec{\nabla}^2\psi + m^2c^4\psi$$

KG-Gln für Teilchen im Potential ϕ

Herleitung der Kontinuitätsgleichung im Potential ϕ

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right) - \underbrace{\frac{q^2}{mc^2}\phi\psi\psi^*}_{\text{Zusatzterm}}$$

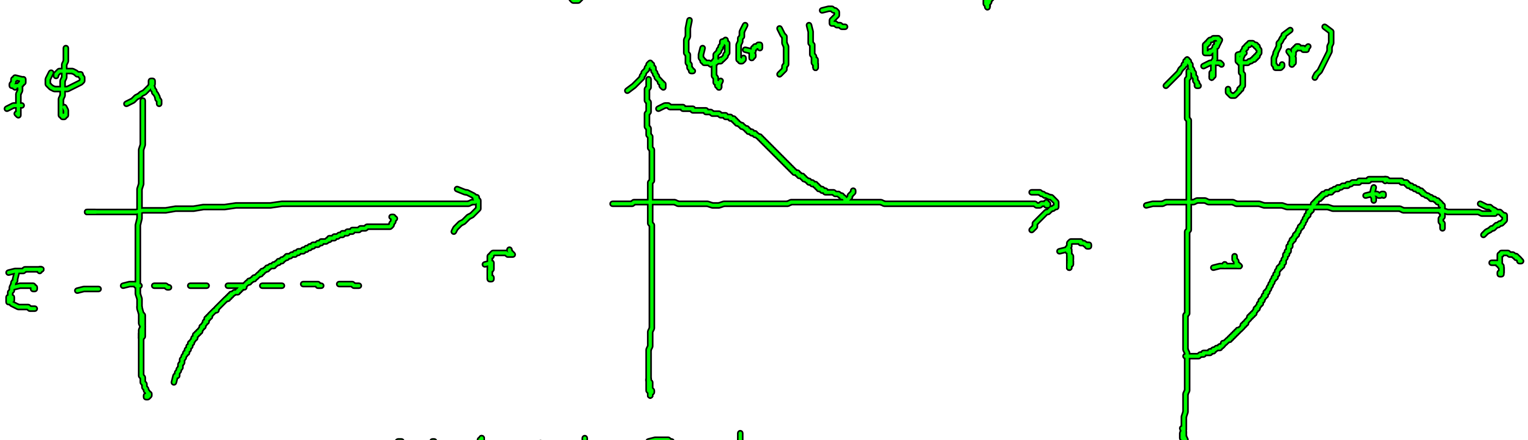
Stationäre Probleme:

$$\psi = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\varphi(\vec{r})$$

$$q\rho = \frac{\hbar q}{mc^2}\left(E - q\phi(r)\right)\varphi^*(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})$$

$\varphi(r)$ kann aus KG Gl. ermittelt werden wenn

$\psi = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\varphi(r)$ Ansatz eingesetzt wird



Annahme: lokalisierter Zustand (gebundener)

gebundener Zustand $\rightarrow$ $E < 0$

$\rightarrow$ ρ hat Bereiche $\lessgtr 0$

Ein Teilchen ist beim Vorliegen externer Potentiale ϕ immer auch von Antiteilchen umgeben

1.8. „langsame" Klein Gordon Gl. ist die Schrödingergl.

Ansatz: $\Psi(r,t) = \tilde{\Psi}(r,t)\, e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}$

langsame Zeitabhängigkeit

einsetzen in KG Gl

$$\partial_t^2 \Psi(r,t) = \partial_t\left\{\left(\partial_t \tilde{\Psi} - i\frac{mc^2}{\hbar}\tilde{\Psi}\right) e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\right\}$$

$$\approx -i\frac{mc^2}{\hbar}\partial_t \tilde{\Psi} - \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\tilde{\Psi}$$

zu Hause einsetzen $\rightarrow$ Schrödingergl. f.

„langsame" Teilchen