

## 2. Diracgleichung für freie Teilchen

- Klein Gordon Gl. 2 Orts- und 2 Zeit ableitungen  
→ Spin 0 Teilchen, weil keine Spin Freiheitsgrad da
- weitere Mgl. der relativist. Invarianz (Gleichbe-  
handlung von Raum (Zeit) : nur erste Ableitungen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = c \underbrace{\alpha^k \frac{\hbar}{i} \partial_k}_{\text{Impuls}} + \underbrace{\beta mc^2}_{\text{Ruhenergie}}$$

Lichtge-  
schwindigkeit  
(Dimension)

Impuls

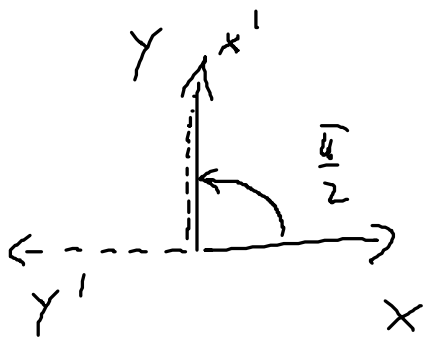
Ruhenergie

$k: x_1, y, z$   
 $x_1, x_2, x_3$

$\alpha, \beta$  sind Koeffizienten

im Prinzip das einfachste Ansatz, funktioniert leider  
nicht wenn  $\alpha^k, \beta$  nur Zahlen sind

das sieht man an Drehung der Koordinatachsen in  $x, y \rightarrow$  läßt die Physik nicht un verändert, ändert die Gleichung!



$$\Sigma \rightarrow \Sigma'$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow x = -y' \\ y = x' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \partial_x = -\partial_{y'} \\ \partial_y = \partial_{x'} \end{array}$$

dh. die momentane Diracgleichung ist nicht unter Drehung invariant! Newtongl. okay, denn dort werden auch die Erhaltungskräfte geändert

$$\left( \vec{e}_x = -\vec{e}_{y'}, \Rightarrow \underline{\vec{e}_x} \partial_x \rightarrow -\vec{e}_{y'} \cdot -\partial_{y'} = \underline{\vec{e}_y} \partial_y \right)$$

## 2.1. Bestimmung der Dirac-Koeffizienten

Dirac:  $\psi$  sind Vektoren  $\psi \rightarrow \overline{\psi}$

dann können die  $\alpha, \beta$  Matrizen sein

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \overline{\psi} = \left( c \hat{\alpha}^k p_k + \hat{\beta} m c^2 \right) \overline{\psi}$$

3 Komponenten des Impulsoperators  
 werden mit je 1 Matrix multipliziert  
 $(\hat{\alpha}^x p_x + \hat{\alpha}^y p_y + \hat{\alpha}^z p_z)$

Forderung um  $\alpha, \beta$  zu bestimmen:

oben links sollte die relativistische  $E(p)$  ergeben

$\underline{H}$  als rechte Seite der Gleichung oben  $\vec{\psi}$  wird

wodurch auf die Gleichung angewendet / durch  $t_i^2$

$$-\frac{1}{\hbar^2} \partial_t^2 \vec{\psi} = \left( c \hat{\alpha}^e \frac{c}{i} \partial_e + \hat{\beta} m c^2 \right) \left( c \hat{\alpha}^k \frac{c}{i} \partial_k + \hat{\beta} m c^2 \right) \vec{\psi}$$

$$-\partial_t^2 \vec{\psi} = -\frac{c^2}{2} \underbrace{\left( \hat{\alpha}^e \hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k \hat{\alpha}^e \right)}_{\text{symmetrisiertes Produkt, weil Matrizen nicht vertauschen}} \partial_e \partial_k \vec{\psi}$$


Symmetrisiertes Produkt, weil Matrizen nicht vertauschen

$$+ \frac{c}{\hbar^2} m c^2 \underbrace{\left( \hat{\alpha}^e \hat{\beta} \partial_e + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k \partial_k \right)}_{\text{geordnet ausmultipliziert}} \vec{\psi}$$

geordnet ausmultipliziert \*

$$+ \frac{\hat{\beta}^2 m^2 c^4}{\hbar^2} \vec{\psi}$$

$$* \hat{\alpha}^e \partial_e \hat{\beta} + \hat{\beta}^k \hat{\alpha}^k \partial_k = \hat{\alpha}^k \partial_k \hat{\beta} + \hat{\beta}^k \hat{\alpha}^k \partial_k$$


  
 weil Zahlen einträge

wählen die Matrizen so, daß  $E(p)$  relativ ist  
 richtig rauskommt; das tut es wenn Klein-Gordange  
 für die einzelnen Komponenten von  $\vec{\psi}$  gilt,

und das gilt, wenn:

$$\hat{\alpha}^e \hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k \hat{\alpha}^e = 2 \delta_{ke} \underline{1}$$

$$\hat{\alpha}^k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k = 0 \rightarrow (\hat{\alpha}^k = -\hat{\beta} \hat{\alpha}^k \hat{\beta}^{-1})$$

$$\hat{\beta}^2 = \underline{1} \rightarrow (\hat{\beta} = \hat{\beta}^{-1})$$

Diese Anforderungen definieren eine  
 „Matrixalgebra“

Matrizen die das erfüllen werde später angegeben.

Komponentenzahl von  $\psi$ ?

$$a) \operatorname{sp}(\hat{\alpha}^k) = -\operatorname{sp}(\hat{\beta} \hat{\alpha}^k \hat{\beta}^{-1}) = -\operatorname{sp}(\hat{\alpha}^k \hat{\beta}^2) = -\operatorname{sp}(\hat{\alpha}^k)$$

$\xrightarrow{\text{zyklisch vertauscht}}$

→ Summe der Eigenwerte von  $\hat{\alpha}^k$  muß Null sein

b) weil  $(\hat{\alpha}^k)^2 = \underline{1}$  (siehe 1. Bedingung)

kann die Matrix nur die Eigenwerte  $\pm 1$  besitzen

c) aus (a+b) folgt → Dimension muß gerade sein  
z.B. 2 und 4

d) 2 nicht möglich, die Bedingungen können mit 4 erfüllt werden

Die Bedingungen werden durch folgende  $\hat{\alpha}^k$  erfüllt:

$$\hat{\alpha}^k = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{G}^k \\ \hat{G}^k & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{1} \end{pmatrix}$$

$$\hat{G}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{G}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu zeigen, daß alle Bedinggg von oben erfüllt sind  
(zu Hause)

damit in Prinzip Diracgleichung festgelegt.

## 2.2. Die Diracgleichung in kovarianter Form \*

die ist schnell zu merken

kovariant heißen Gleichungen die in allen  $K$  S (Mertidsystemen)

die selbe Form haben und dabei relativistisch

invariant sind, d.h. man muß sie mit Viervektoren

schreiben können:

Dirac mal  $\frac{\hat{\beta}}{c}$ , durch  $t$ ,  $x_0 = c t$

$$-i \left( \hat{\beta} \partial_0 + \hat{\beta} \alpha^i \partial_i + i \frac{mc}{\hbar} \frac{1}{\hbar} \right) \vec{\psi} = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{0 \text{ Komponente}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{1-3 \text{ Komponente}}$

$\vec{\psi}$  als Viervektor definieren

$$\hat{\gamma}^\mu = (\hat{\gamma}^0, \hat{\gamma}^1, \hat{\gamma}^2, \hat{\gamma}^3)$$

$$\hat{\beta} = \hat{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}^i & \hat{0} \end{pmatrix}$$

$$0 = \underbrace{(-i \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \hat{1})}_{\not{D}} \vec{\psi} \iff \underbrace{(-i \not{D} + \frac{mc}{\hbar} \hat{1})}_{\not{D}} \vec{\psi} = 0$$

Schulste Notation der Diracgleichung

$$\gamma^\mu a_\mu \hat{=} \not{a}$$

2.3. Die Diracgleichung erfüllt eine Kontinuitätsgleichung  
und auch die Wahrscheinlichkeitsdichteinterpretation

$$i \hbar \partial_t \vec{\psi} = c \hat{\alpha}^k p_k \vec{\psi} + \hat{\beta} m c^2 \vec{\psi}$$

$$-i \hbar \partial_t \vec{\psi}^\dagger = c (p_k \vec{\psi})^\dagger \hat{\alpha}^{k\dagger} + \vec{\psi}^\dagger \hat{\beta}^\dagger m c^2$$

$\hat{\alpha}^k$  hermitisch konjugieren (adjungieren)

erste Gleichung mit  $\vec{\psi}^\dagger$ , zweite Gleichung mit  $\vec{\psi}$   
 multiplizieren und abziehen voneinander

$$\partial_t \underbrace{(\vec{\psi}^\dagger \cdot \vec{\psi})}_{\rho(r,t)} = - \partial_k \underbrace{(c \vec{\psi}^\dagger \alpha^k \psi)}_{j^k(r,t)}$$

kann als Wahrscheinlichkeitsdichte und Strom interpretiert  
 werden, analog Schrödingers Gleichung  $\rho = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$   
 $\geq 0$

## 2.4. Teilchen - Antiteilchenlösung der Diracgleichung

$\vec{\psi}$  als Lösung wird "Spinor" genannt

$\vec{\psi} = (\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2)$  2 Zweiervektoren  $\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2$

Ausatz:  $\vec{\psi} = (\vec{\psi}_1(t), \vec{\psi}_2(t)) e^{-i \frac{E}{\hbar} t + i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}}$  c-Zahl Komponente

Einsetzen in Diracgleichung:

$$E \begin{pmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \hat{0} & \vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{p} \\ \vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{p} & \hat{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_2 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{p} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3) \cdot \vec{p} = \hat{\sigma}_1 p_1 + \hat{\sigma}_2 p_2 + \hat{\sigma}_3 p_3$$

$$E \vec{\psi}_1 = c \vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{p} \vec{\psi}_2 + mc^2 \vec{\psi}_1, \quad E \vec{\psi}_2 = c \vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{p} \vec{\psi}_1 - mc^2 \vec{\psi}_2$$



2 gekoppelte Gleichungen für  $\vec{\Psi}_1$  und  $\vec{\Psi}_2$   
als homogenes Gleichungssystem, damit  $\vec{\Psi}_1, \vec{\Psi}_2$  jeweils  
nicht Null werden muß Determinante verschwinden

→ relativist.  $E(p)$  → keine neue Info

$$\vec{\Psi}_2 = \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_\lambda + mc^2} \vec{\Psi}_1, \quad \lambda = \pm \text{ für die 2 Zweige der Energie - Impuls beziehung}$$

$$\vec{\Psi}_{p\lambda}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \vec{\Psi}_1 \\ \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_\lambda + mc^2} \vec{\Psi}_1 \end{pmatrix} e^{-i \left( \frac{E_\lambda(p)}{\hbar} t - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} \right)} \quad \cdot \text{ Normierung}$$

noch nicht bestimmt ist  $\vec{\Psi}_1$ , wird folgendermaßen  
bestimmt: da  $|\Psi_{p\lambda}|^2$  normiert als Wahrscheinlich-  
keitsdichte interpretiert werden kann, muß auch die  
Normierungsfaktor mit genommen werden

$\vec{\Psi}_1$  kann also ein Einheitsvektor sein, alle  $\vec{\Psi}_1$   
kann durch die Vektoren  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  aufgespannt werden

$$\vec{\psi}_{p\lambda} \begin{matrix} \circ \\ m_s \end{matrix} = \left( \frac{m c^2 + E_\lambda(p)}{2 E_\lambda(p)} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{m_s} \\ \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_\lambda + m c^2} \vec{\chi}_{m_s} \end{pmatrix} e^{i(\dots)}$$

Majorana  
(ohne Beweis)

$$\vec{\chi}_{m_s} \rightarrow m_s \text{ unverteilt } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(es gibt 2  $m_s$ )

Es entsteht ein weiterer Freiheitsgrad in  $\vec{\psi}$ :  
 3 Freiheitsgrade  $\vec{\psi}$  zu klassifizieren über Quantenzahlen

$\vec{\psi}$  ist ein Spinor mit

ein Impuls  $\vec{p}$

ein Energie auf dem positiven oder negativen Zweig ( $\pm$ )

eine weitere Quantenzahl  $m_s$