

## momentaner Stand

- die Lösungen der Diracgleichung sind ebene Wellen ( $e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$ ), die durch 3 Parameter ("Quantenzahlen") bestimmt sind:

$$\vec{p}, \lambda, m_s$$

$$\vec{\psi}(\vec{p}, \lambda, m_s) = \left( \frac{mc^2 + E_\lambda(\vec{p})}{2E_\lambda(\vec{p})} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{m_s} \\ \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_\lambda + mc^2} \vec{\chi}_{m_s} \end{pmatrix} \cdot e^{-i \left( \frac{E_\lambda(\vec{p})}{\hbar} t - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} \right)}$$

- Vektorcharakter, relativistische Dispersion

- beliebige Lösungen können durch eine Linearkombination der ebenen Wellen ausgedrückt werden:

$$\vec{\psi} = \sum_{\vec{p}, \lambda, m_s} c_{\vec{p}, \lambda, m_s} \vec{\psi}(\vec{p}, \lambda, m_s)$$

- $\vec{\psi}$  sind Eigenfunktionen zu

$$\underline{H}: \text{Quantenzahl } \lambda, \text{ Eigenwert } E_\lambda(\vec{p})$$

$\vec{f}$ : Quantenzahl  $\vec{p}$ , Eigenwert  $\vec{p}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ \cdot \end{pmatrix}$ : Quantenzahl  $m_s$ , Eigenwert  $\begin{pmatrix} ? \\ \cdot \end{pmatrix}$

? Operator ist der Helizitätsoperator  $\hat{h}$

$$\underline{\hat{h}} = \frac{\vec{\hat{J}} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$$

$$\vec{\hat{J}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{\hat{\sigma}} = (\text{3 Pauli-Spinmatrizen})$$

$\vec{\hat{J}}$  wird sich als Spinoperator erweisen,

$$\text{also: } m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar \rightarrow m_s = \pm \frac{1}{2}$$

• ÜA:  $\hat{h}$ ,  $\hat{h}$  vertauschen  $\rightarrow$  gemeinsames

Eigenfunktionsystem

2.5 Teilchen - Antiteilchen Lösungen: Interpretation

OBdA wählen wir eine feste Impulsrichtung  $\vec{p} = (0, 0, p_z)$ ,  
also Diracwelle mit  $e^{i p_z z}$

$$\underline{L} = \vec{s} \cdot (0, 0, 1) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^z & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^z \end{pmatrix}$$

$$\underline{L} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{L} \begin{pmatrix} \chi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \chi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist Eigenvektor  
(Behauptung)

ist also Eigenvektor

$$\underline{L} \begin{pmatrix} \chi \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \chi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Charakterisierung der Diracwellen muß neben  $p, \lambda = \pm$

$m_s = \pm \frac{1}{2}$  mit benannt werden,

$\frac{\hbar}{2} m_s$  gibt die Projektion von  $\vec{s}$  auf die Impuls-

richtung  $\vec{p}$  an

$$\underline{L} \sim \vec{s} \cdot \vec{p}$$



$\vec{p}$  ist dabei eine festgewählte Viererimpulsrichtung

Mit dem Spin  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  kann man jetzt

4 linear unabhängige Lösungen zu jeder Impulsrichtung  $\vec{p}$

konstruieren:  $\psi_{p, \lambda, m_s}$

$$\vec{\psi}_{\vec{p}, +, +\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p_z}{E_+ + m c^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i \left( \frac{E_+(\vec{p}) t}{\hbar} - \frac{p_z z}{\hbar} \right)}$$

$$= N_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c p_z / (E_+ + m c^2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i \left( \frac{E_+(\vec{p}) t}{\hbar} - \frac{p_z z}{\hbar} \right)}$$

$$\vec{\psi}_{\vec{p}, +, -\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -c p_z / (E_+ + m c^2) \end{pmatrix} e^{-i \left( \frac{E_+(\vec{p}) t}{\hbar} - \frac{p_z z}{\hbar} \right)}$$

$$\vec{\chi}_{p_1, -1, +\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} -cp_2 / (E_+ + mc^2) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i \left( \frac{E_+(p)t}{\hbar} - \frac{p_2 z}{\hbar} \right)}$$

$$\vec{\chi}_{p_1, -1, -\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} 0 \\ cp_2 / (E_+ + mc^2) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i \left( \frac{E_+(p)t}{\hbar} - \frac{p_2 z}{\hbar} \right)}$$

mit  $N_- \cdot \frac{cp_2}{E_- + mc^2} = N_+$

$$N_- = \frac{-cp_2 N_+}{E_+ + mc^2}$$

man erhält in Vgl zur Schrödingers Theorie einen  
 Drehimpuls grade  $(\lambda = \mp, m_s = \mp \frac{1}{2})$

a) Eigenschaften des Spin freiheits grade

$p, \lambda$  fest  $\rightarrow$  2 Vektorlösungen,

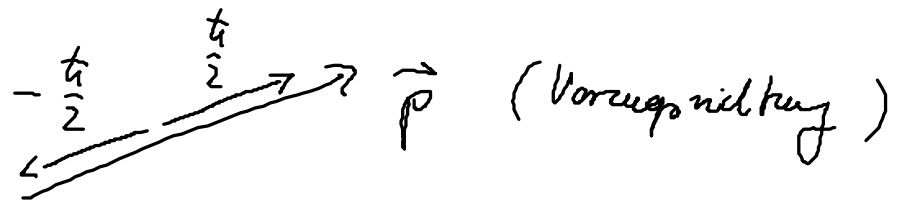
nach QM: die Eigenwerte von  $\underline{L}_z = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

sind Meßgrößen, also:

die Projektion einer Observable  $\vec{S}$

kann gemessen werden, die Meßwerte sind

$$\frac{\hbar}{2} \quad | \quad - \frac{\hbar}{2}$$



2 Einstellungen können gemessen werden und wegen

$|\text{Eigenwert}| = \frac{1}{2} \hbar$  spricht man von Spin  $\frac{1}{2}$  Teilchen

„ Name Spin: rechts und linksdrehend bzgl.  
der Ausbreitungsrichtung kommt  
von einer Analogie zum Bahndreh-  
impuls

b) Zur Analogie: Spin - Bahndrehimpuls

Spin als innerer Drehimpuls  $\vec{S}$

Bahndrehimpuls als äußerer Drehimpuls  $\vec{L}$

beide erfüllen "ähnliche" Vertauschungsrelationen

$$[\underline{l}_j, \underline{l}_k] = i \underline{l}_m \quad [\hat{s}_j, \hat{s}_k] = i \hat{s}_m$$

$$[\underline{l}^2, \underline{l}] = 0 \quad [\hat{s}^2, \hat{s}] = 0$$

diese Beziehung gelte f. dimensionslose  $\underline{l}, \hat{s}, \underline{l} \rightarrow \frac{\underline{l}}{\hbar}$

(finde Sie die Verfactoren!)

$$\hat{s} \rightarrow \frac{\hat{s}}{\hbar}$$

$$\underline{l}^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \hbar^2 \underline{l}(l+1) Y_{lm} \rightarrow \hat{s}^2 \chi_{ms} = \hbar^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \chi_{ms}$$

$$\underline{l}_z Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \hbar m_l Y_{lm} \rightarrow \hat{s}_z \chi_{ms} = \hbar m_s \chi_{ms}$$

$$\underline{l} = 0, 1, 2, \dots, \quad m_l = -l, \dots, 0, \dots, +l \rightarrow s = \frac{1}{2}, \quad m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

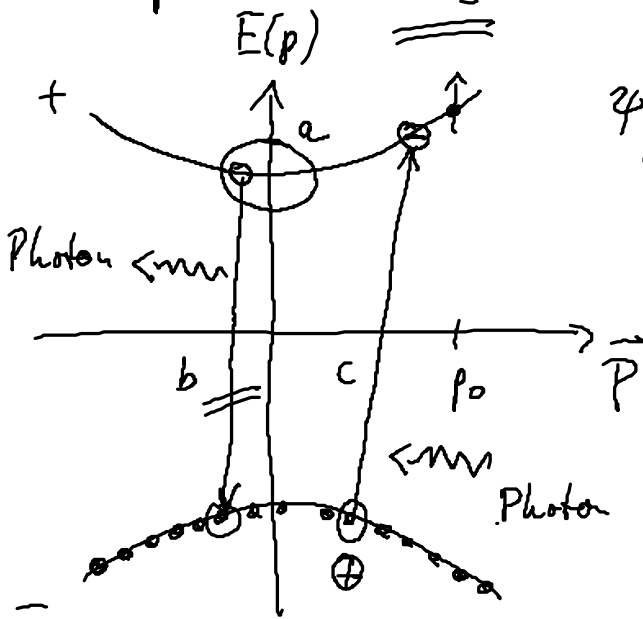
Spin kann offensichtlich als

halbzelliges Analogon zum Bahndrehimpuls gesehen werden.

$$\chi_{s m_s}$$

c) Das Energiespektrum des Dirac Teilchen

$E_{\pm}$ : was in der Klein-Gordon Theorie nicht die Energie, die Energie war  $|E_{\pm}|$ , es gab keine negativen Energien des Lagrange formalismus, bei Felder im Fall der Dirac Gleichung ergibt positive und negative Energien ( $E_{\pm}$  ist ernst zu nehmen)



$$\psi_{p_0, +, +\frac{1}{2}}$$

a) Ableitung der Schrödinger-Gleichung

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2} + \frac{p^2}{2m}$$

b) da es auf (-) freie Zustände gibt, kann ein Elektron unter Energie und Impulserhaltung zerfallen

(energetisch günstig)

→ muß Unstimm sein

Idee von Dirac: Fermi See (Elektronen) auf - Dispersion → nach Pauli-Prinzip ist Übergang nach unten verboten

⇒ Dirac Theorie ist Vielteilchen Theorie

c) Teilchen - Antiteilchen erzeugung aus Vakuum durch Absorption ein Photons



ergibt aus dem "Nichts" ein Elektron bei  $t$  und Position (Antiteilchen mit gleicher Masse aber entgegengesetzter Ladung) im  $-$  Zustand.

d) das Problem der  $\infty$  Masse und Ladung des Diracsees wird zum Teil in der QFT behoben

3) Der nichtrelativistische Grenzfall:

Gleichungen für die Schwache Kopplung eines Elektrons an elektromagnetische Felder

Kopplg. von em. Feldern an Diracfelder

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q \vec{A}, \quad H \rightarrow H + q \phi$$

$\vec{A}, \phi$  sind Vektor und Skalares Potential

$$i \hbar \partial_t \psi = \left( c \hat{\alpha} \cdot (\vec{p} - q \vec{A}) + \hat{\beta} m c^2 + q \phi \right) \psi$$

# Dirac Gleichung f. Spin $\frac{1}{2}$ im elektromagnetischen Feld

externes Feld

- Feld des Protons bei  $e^-$  Bewegung in H-Atom

- angelegte Felder  $(\vec{E}, \vec{B})$

$$\vec{\Pi} = (\vec{p} - q \vec{A})$$

interne Felder

Selbstwechselwirkungsterme  
"spontane Emission"

## 3.1. Die Näherungsprozedur

Ziel: korrekturen zur Schrödingergleichung aus relativistischer Theorie, sollte Spin-Effekte!

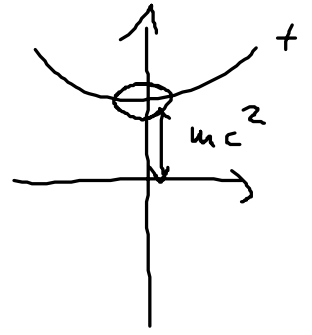
made Ansatz:  $\vec{\Psi} = (\vec{\Psi}_1(\vec{r}, t), \vec{\Psi}_2(\vec{r}, t))$

Zweikomponenten  $\uparrow$

$$i \hbar \partial_t \begin{pmatrix} \vec{\Psi}_1 \\ \vec{\Psi}_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \hat{\sigma} \cdot \vec{\Pi} & \vec{\Psi}_2 \\ \hat{\sigma} \cdot \vec{\Pi} & \vec{\Psi}_1 \end{pmatrix} + q \phi \begin{pmatrix} \vec{\Psi}_1 \\ \vec{\Psi}_2 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \vec{\Psi}_1 \\ -\vec{\Psi}_2 \end{pmatrix}$$

spalte die Ruheenergie ab mit

$$\begin{pmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_2 \end{pmatrix} = e^{-i \frac{mc^2 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_2 \end{pmatrix}$$



langsam zeit abhängigkeit

$$\partial_t \vec{\psi}_i \ll \frac{mc^2}{\hbar} \vec{\psi}_i$$

$$i \hbar \partial_t \begin{pmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} & \vec{\psi}_2 \\ \vec{\psi}_1 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} \end{pmatrix} e^{i\phi} \begin{pmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_2 \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\psi}_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\psi}_i \rightarrow \psi_i$$

$$i \hbar \partial_t \vec{\psi}_1 = c \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} \vec{\psi}_2 + g \phi \vec{\psi}_1$$

$$i \hbar \partial_t \vec{\psi}_2 = c \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} \psi_1 + g \phi \vec{\psi}_2 - 2mc^2 \vec{\psi}_2$$

man entwickelt jetzt die langsamen

Terme störungstheoretisch und

erhält Korrekturen zur Schrödingergleichung.