momentaner Stand

- die Lösungen der Diracgleichungen sind ebene Wellen ($e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$), die durch 3 Parameter („Quantenzahlen") bestimmt sind:
  $\vec{p}, \lambda, m_s$

$$\vec{\psi}(p, \lambda, m_s) = \left(\frac{mc^2 + E_\lambda(p)}{2E_\lambda(p)}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{m_s} \\ \dfrac{c\,\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{p}}{E_\lambda + mc^2}\,\vec{\chi}_{m_s} \end{pmatrix} \cdot e^{-i\left(\frac{E_\lambda(\vec{p})}{\hbar}t - \frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}\right)}$$

- Vektorcharakter, relativistische Dispersion
  ,
- beliebige Lösungen können durch eine LiKo der ebenen Wellen ausgedrückt werden:

$$\vec{\psi} = \sum_{\vec{p}, \lambda, m_s = ?} c_{\vec{p}\lambda m_s}\, \vec{\psi}(\vec{p}, \lambda, m_s)$$

- $\vec{\psi}$ sind Eigenfunktion zu

  $\underline{H}$: Quantenzahl λ, Eigenwert $E_\lambda(p)$

$\vec{p}$: Quantenzahl $\vec{p}$, Eigenwert $\vec{p}$

?: Quantenzahl m_s, Eigenwert ?

? Operator ist der Helizitätsoperator $\underline{\Lambda}$

$$\underline{\Lambda} = \hat{\vec{S}} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} ,$$

$$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} , \quad \hat{\vec{\sigma}} = (3 \text{ Pauli-Spinmatrizen})$$

$\hat{\vec{S}}$ wird sich als Spinvektoroperator erweisen,

ebenso: $m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \rightarrow m_s = \pm \frac{1}{2}$

- ÜA: $\underline{\Lambda}$, $\underline{H}$ vertauschen → gemeinsames Eigenfunktionssystem

2.5 Teilchen-Antiteilchen-Lösungen: Interpretation

OBdA wählen wir eine feste Impulsrichtung $\vec{p} = (0, 0, p_z)$, also Diracwelle mit $e^{i p_z \cdot z}$

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \vec{\hat{s}} \cdot (0,0,1) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^z & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^z \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Lambda}} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{\frac{1}{2}} \\ \overleftarrow{\chi}_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist Eigenvektor (Behauptung)

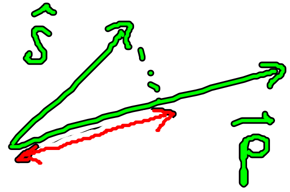
ist also Eigenvektor

$$\underline{\underline{\Lambda}} \begin{pmatrix} \chi_{-\frac{1}{2}} \\ \chi_{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Charakterisierung der Diracwellen muß neben $p, \lambda = \pm$
$m_s = \pm \frac{1}{2}$ mit benannt werden,

$\frac{\hbar}{2} m_s$ gibt die Projektion von $\hat{\vec{s}}$ auf die Impulsrichtung $\vec{p}$ an

$$\underline{\underline{\Lambda}} \sim \vec{\hat{s}} \cdot \vec{p}$$



$\vec{p}$ ist dabei eine fest gewählte Vorzugsrichtung

Mit den Werten $m_s = \pm\frac{1}{2}$ kann man jetzt

4 linear unabhängige Lösungen zu jedem Impuls $\vec{p}$

konstruieren: ψ_{p,λ,m_s}

$$\psi_{\vec{p},+,+\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_+ + mc^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_+(p)t}{\hbar} - p_z z\right)}$$

$$= N_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z/(E_+ + mc^2) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_+(p)t}{\hbar} - \frac{p_z z}{\hbar}\right)}$$

$$\psi_{p,+,-\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -cp_z/(E_+ + mc^2) \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_+(p)t}{\hbar} - \frac{p_z z}{\hbar}\right)}$$

$$\vec{\psi}_{p,-,+\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} -cp_z/(E_+ + mc^2) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_-(p)t}{\hbar} - \frac{p_z z}{\hbar}\right)}$$

$$\vec{\psi}_{p,-,-\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} 0 \\ cp_z/(E_+ + mc^2) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_-(p)t}{\hbar} - \frac{p_z z}{\hbar}\right)}$$

mit $N_- \cdot \frac{cp_z}{E_- + mc^2} = N_+$

$$N_- = \frac{-cp\, N_+}{E_+ + mc^2}$$

man erhält in Vgl zur Schrödinger theorie neue Freiheitsgrade ($\lambda = \pm$, $m_s = \pm\frac{1}{2}$)

a) Eigenschaften des Spinfreiheitsgrads

p, λ fest → 2 Vektorlösungen,

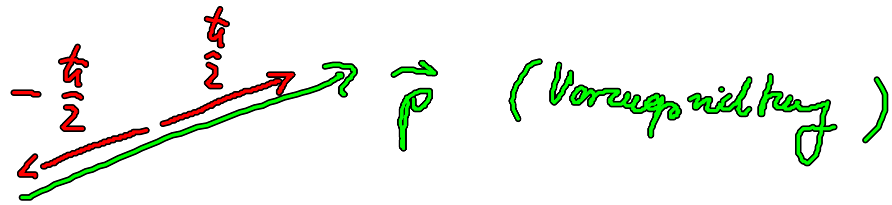
nach QM: die Eigenwerte von $\underline{\Lambda} = \hat{\vec{s}} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

sind Meßgrößen, also:

die Projektion einer Observablen $\vec{s}$

kann gemessen werden, die Meßwerte sind

$\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}$



2 Einstellungen können gemessen werden und wegen

$|\text{Eigenwert}| = \frac{1}{2}\hbar$ spricht man von Spin $\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ Teilchen

„Name Spin“: rechts und linksdrehend bezgl der Ausbreitungsrichtung kommt von einer Analogie zum Bahndreh-impuls

b) Zur Analogie: Spin – Bahndrehimpuls

Spin als innerer Drehimpuls $\vec{s}$

Bahndrehimpuls als äußerer Drehimpuls $\vec{\ell}$

beide erfüllen „ähnliche" Vertauschungsrelationen

$$[\underline{l}_j, \underline{l}_k] = i \underline{l}_m \qquad [\hat{s}_j, \hat{s}_k] = i \hat{s}_m$$

$$[\underline{l}^2, \underline{\vec{l}}] = 0 \qquad [\hat{s}^2, \hat{\vec{s}}] = 0$$

diese Beziehungen gelten f. dimensionslose $\vec{l}, \vec{s}$, $\vec{l} \to \frac{\underline{\vec{l}}}{\hbar}$

(finden Sie die Vorfaktoren!) $\vec{s} \to \frac{\underline{\vec{s}}}{\hbar/2}$

$$\underline{l}^2 \, Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi) = \hbar^2 \, l(l+1) \, Y_{lm_l} \longrightarrow \hat{s}^2 \chi_{m_s} = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \chi_{m_s}$$

$$\underline{l}_z \, Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi) = \hbar m_l \, Y_{lm_l} \longrightarrow \hat{s}_z \, \chi_{m_s} = \hbar m_s \chi_{m_s}$$

$$l = 0, 1, 2 \cdots, \; m_l = -l, \cdots 0 \cdots, +l \longrightarrow s = \frac{1}{2} \qquad m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

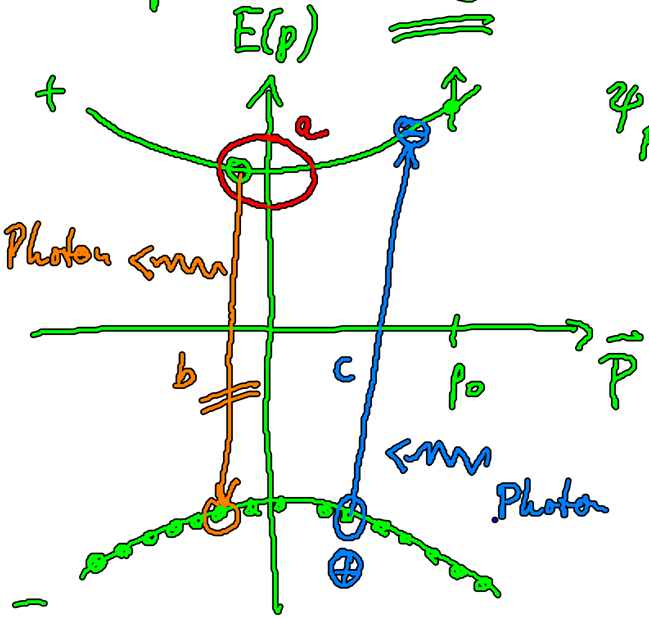
Spin kann offensichtlich als ein halbzahliges Analogon zum Bahndrehimpuls gesehen werden.

$$\chi_{s m_s}$$

c) Das Energiespektrum der Diracteilchen

$E_\pm$: war in der Klein-Gordon Theorie nicht die Energie, die Energie war $|E_\pm|$, es gab keine negativen Energien

der Lagrangeformalismus frei Felder im Fall der Diracgleichung ergibt positive und negative Energien ($E_\pm$ ist ernst zu nehmen)



$\psi_{p_0,+,+\frac{1}{2}}$

a) Alltag der Schrödingergl.

$$E_+ = \cancel{mc^2} + \frac{p^2}{2m}$$

b) da es auf (−) freie Zustände gibt, kann ein Elektron unter Energie und Impulserhaltung zerfallen (energetisch günstig)
→ muß Illusion sein

Idee von Dirac: Fermisee (Elektronen) auf − Dispersion → nach Pauli-Prinzip ist Übergang nach unten verboten
⇒ Diractheorie ist Vielteilchentheorie

c) Teilchen - Antiteilchen erzeug. aus Vakuum durch Absorption eines Photons ergibt aus dem „Nichts" ein Elektron bei + und Positron (Antiteilchen mit gleicher Masse aber entgegengesetzter Ladung) im – Zustand.

d) das Problem der ∞ Masse und Ladung des Diracsees wird zum Teil in der QFT behoben

3) <u>Der nichtrelativistische Grenzfall:</u>

<u>Gleichungen für die schwache Kopplung eines Elektrons an elektromagnetische Felder</u>

Kopplg. von em. Feldern an Diracteilchen

$$\vec{p} \rightarrow \vec{\underline{p}} - q\vec{A} \,, \quad \underline{H} \rightarrow \underline{H} + q\phi$$

$\vec{A}$, ϕ sind Vektor und Skalares Potential

$$i\hbar\partial_t \vec{\psi} = \left(c\,\vec{\hat{\alpha}}\cdot\left(\vec{p} - \underline{\underline{q\vec{A}}}\right) + \hat{\beta}mc^2 + q\phi \right)\vec{\psi}$$

Diracgleichung f. Spin $\frac{1}{2}$ im elektromagnetischen Feld

externes Feld

- Feld des Protons bei e^- Bewegg. im H-Atom

interne Felder

Selbstwechselwirkungsterme „spontane Emission“

- angelegte Felder (E, B)

$$\vec{\Pi} = (\vec{p} - q\vec{A})$$

3.1. Die Näherungsprozedur

Ziel: Korrekturen zur Schrödingergleichung aus relativistischer Theorie, sollen Spin-Effekte!

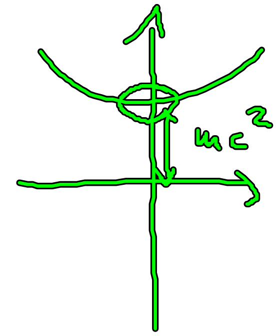
Mache Ansatz: $\vec{\Psi} = (\vec{\varphi}_1(\vec{r},t),\ \vec{\varphi}_2(r,t))$

Zweiervektoren

$$i\hbar\,\partial_t \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{\Pi}\ \vec{\varphi}_2 \\ \vec{\hat{\sigma}} \cdot \Pi\ \vec{\varphi}_1 \end{pmatrix} + q\phi \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ -\vec{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$

spalte die Ruheenergie ab mit

$$\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{pmatrix} = e^{-i\frac{mc^2 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \vec{\tilde{\varphi}}_1 \\ \vec{\tilde{\varphi}}_2 \end{pmatrix}$$



langsame Zeitabhängigkeit

$$\partial_t \vec{\tilde{\varphi}}_i \ll \frac{mc^2}{\hbar} \vec{\tilde{\varphi}}_1$$

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \vec{\tilde{\varphi}}_1 \\ \vec{\tilde{\varphi}}_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, \vec{\tilde{\varphi}}_2 \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\, \vec{\tilde{\varphi}}_1 \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \vec{\tilde{\varphi}}_1 \\ \vec{\tilde{\varphi}}_2 \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\tilde{\varphi}}_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\varphi}_i \to \varphi_i$$

$$i\hbar\partial_t \vec{\varphi}_1 = c\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{\pi}\, \varphi_2 + q\phi\, \vec{\varphi}_1$$

$$i\hbar\partial_t \vec{\varphi}_2 = c\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{\pi}\, \varphi_1 + q\phi\, \vec{\varphi}_2 - 2mc^2 \vec{\varphi}_2$$

man entwickelt jetzt die langsamen Terme störungstheoretisch und erhält Korrekturen zur Schrödingergleichg.