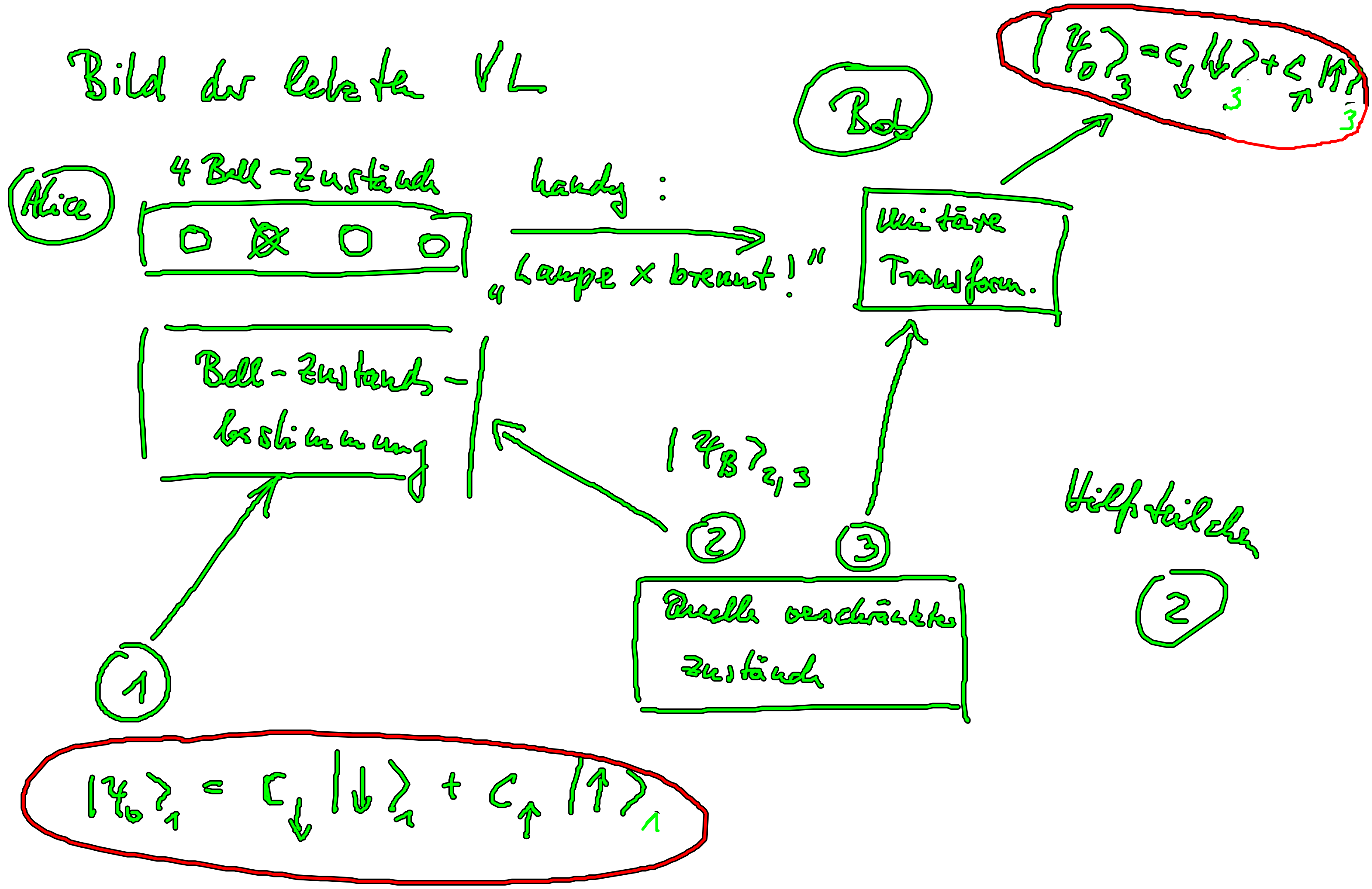
Bild der letzten VL



Ziel: Zustand des Teilchens (1) auf Teilchen (3) zu übertragen

Hilfsteilchen (2)

Voraus.: man kann den 2 Teilchen Spinraum komplett durch verschränkte Zustände aufspannen, diese Zustände könnten die Basis der Bellzustände sein:

$$|\psi^\pm\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \pm |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_1\right)$$

$$|\phi^\pm\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \pm |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2\right)$$

Bellzustandmessg. bringt das System nach der Messg. in einen der Bell-Basiszustände (benannt nach Bell)

Schema der Teleportation

1) Gesamtwellenfunktion am Beginn

3 Teilchen : $|\psi\rangle_{1,2,3} = |\psi_0\rangle_1 |\psi_B\rangle_{2,3}$ (ψ_B sei fest u. bekannt)

Alice hat Teilchen 1 unter Kontrolle $|\psi_0\rangle_1$

$$|\psi\rangle_{1,2,3} = \left(c_\downarrow |\downarrow\rangle_1 + c_\uparrow |\uparrow\rangle_1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\left(|\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3 - |\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3\right)}_{|\psi_B^-\rangle_{23}}$$

wird so produziert

Bob wird an Teilch. 3 arbeiten

2) Messung von Alice an den Teilchen 1 und 2, projiziert auf Bellzustände

Alice: Welchen Bellzustand liegen für ① und ② vor?

$$|\psi\rangle_{1,2,3} = \Big(|\phi^+\rangle_{12} \left(c_\downarrow |\uparrow\rangle_3 - c_\uparrow |\downarrow\rangle_3 \right)$$

$$+ |\phi^-\rangle_{12} \left(c_\downarrow |\uparrow\rangle_3 + c_\uparrow |\downarrow\rangle_3 \right)$$

$$+ |\psi^+\rangle_{12} \left(- c_\downarrow |\uparrow\rangle_3 + c_\uparrow |\uparrow\rangle_3 \right)$$

$$- |\psi^-\rangle_{12} \left(c_\downarrow |\downarrow\rangle_3 + c_\uparrow |\uparrow\rangle_3 \right) \Big)$$

Alice mißt in welchen Bellzustand das System ① + ② springt.

d.h. eine Lampe leuchtet (zeigt den Bellzustand an in den ψ_{123} ist)

3) Alice ruft Bob an und sagt Lampe 1 leuchtet, damit weiß Bob, Teilchen 3 kann nur in Zustand

$$|\psi_0'\rangle_3 = c_\downarrow |\uparrow\rangle_3 - c_\uparrow |\downarrow\rangle_3$$ sein!

Das ist leider noch nicht $|\psi_0\rangle_3$

4) Bob kann aber aus $|\psi_0'\rangle_3$ den

Zustand $|\Psi_0\rangle_3$ erzeugen indem er eine unitäre Transformation ausführt,

für uns: Matrixmultiplikation die $|\Psi_0'\rangle_3$ auf

$$|\Psi_0\rangle_3 \text{ abbildet } |\Psi_0'\rangle_3$$

Danach liegt $|\Psi_0\rangle_3$ also das Teilchen ③ im Zustand von $|\Psi_0\rangle_1$ vor!

konkretes Beispiel später bei „Quantendynamik"

3. Behandlung von Störungen

Motivation: Oftmals kann $\underline{H} = \underline{H_0} + \underline{V}$ zerlegt werden

$\underline{H_0}$ bekanntes, exakt gelöstes Problem

$\underline{V}$ externe oder interne Störung

elektrisches oder magnetisch Feld von außen

z.B. Spin-Bahn Kopplung

$\underline{V}$ kann zeitlich konstant oder zeitabhängig sein.

- manchmal sind Störungen klein und können als kleine Änderung des ursprünglichen Systems betrachtet werden
  „Störungstheorie" $\longrightarrow$ Taylorreihen, bei denen Δx durch Matrixelemente von $\underline{V}$ gegeben ist

- Ausgangspunkt: $\quad i\hbar|\dot{\psi}\rangle = (\underline{H}_0 + \underline{V})|\psi\rangle$

  bekannt sei $\quad \underline{H}_0 |n\rangle = \varepsilon_n |n\rangle$

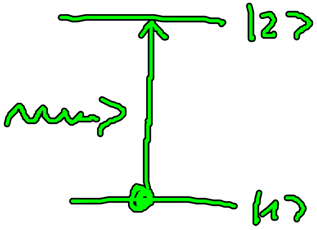
  zB $\underline{H}_0$ des H-Atoms, $\underline{V}$ externes elektrisches Feld

allgemein Aspekte an 2 Niveaus, dann Mehrniveausystemen

3.1 Zweiniveausystem

2 Niveaus / Zustände werden aus System herausgegriffen

z.B. 2 atomare Zustände



„⇝" externe Störung → Quantenübergänge

Einelektronensystem

$$i\hbar\, |\dot{\psi}\rangle = (\underline{H}_0 + \underline{V})\, |\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle(r,t) = c_1(t)\,|1\rangle + c_2(t)\,|2\rangle$$

$$\underline{H}_0\,|1\rangle = \varepsilon_1\,|1\rangle\,, \quad \underline{H}_0\,|2\rangle = \varepsilon_2\,|2\rangle$$

einsetzen in Schrödingergleichung

$$i\hbar\left(\dot{c}_1\,|1\rangle + \dot{c}_2\,|2\rangle\right) = \underline{H}_0\left(c_1\,|1\rangle + c_2\,|2\rangle\right) + \underline{V}\left(c_1\,|1\rangle + c_2\,|2\rangle\right)$$

mit $\langle 1|$, bzw. $\langle 2|$ multiplizieren $\left(\begin{matrix}\langle 1|1\rangle = 1\\ \langle 1|2\rangle = 0\end{matrix}\right)$

$$i\hbar\, \dot{c}_1 = \varepsilon_1 c_1 + c_1 \langle 1|\underline{V}|1\rangle + c_2 \langle 1|\underline{V}|2\rangle$$

$$i\hbar\, \dot{c}_1 = (\varepsilon_1 + V_{11})\, c_1 + V_{12}\, c_2\,, \quad \text{analog}$$

$$i\hbar\, \dot{c}_2 = (\varepsilon_2 + V_{22})\, c_2 + V_{21}\, c_1$$

Differentialgleichungen f. zeitabhängigen Koeffizienten von $|\psi\rangle$

3.11. Zeitunabhängige Störungen

$\underline{V}$ sei <u>nicht</u> zeitabhängig

Ansatz $\quad c_i(t) = c_i\, e^{-iEt/\hbar} \rightarrow c_i$: konstant

E ist die Energie des Systems, denn $\quad \underline{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$$E c_1 = \varepsilon_1 c_1 + V_{11} c_1 + V_{12} c_2$$

$$E c_2 = \varepsilon_2 c_2 + V_{22} c_2 + V_{21} c_1$$

$V_{12} = \langle 1|\underline{V}|2\rangle$

$V_{21} = \langle 2|\underline{V}|1\rangle = \underline{\underline{V_{12}^*}}$

ist homogenes lineares Gleichungssystem dessen Koeffizientendeterminante verschwinden muß

$$\begin{pmatrix} E-\varepsilon_1-V_{11} & -V_{12} \\ -V_{21} & E-\varepsilon_2-V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(E-\varepsilon_1-V_{11})(E-\varepsilon_2-V_{22}) - \underline{\underline{|V_{12}|^2}} \overset{!}{=} 0$$

für nichttriviale Lösungen

$$E_\pm = \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2}{2} \pm \frac{1}{2}\left((\tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2)^2 + 4|V_{12}|^2\right)^{1/2}$$

man erhält 2 Lösungen mit $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + V_{11} \rightarrow \varepsilon_1$

$\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 + V_{22} \rightarrow \varepsilon_2$

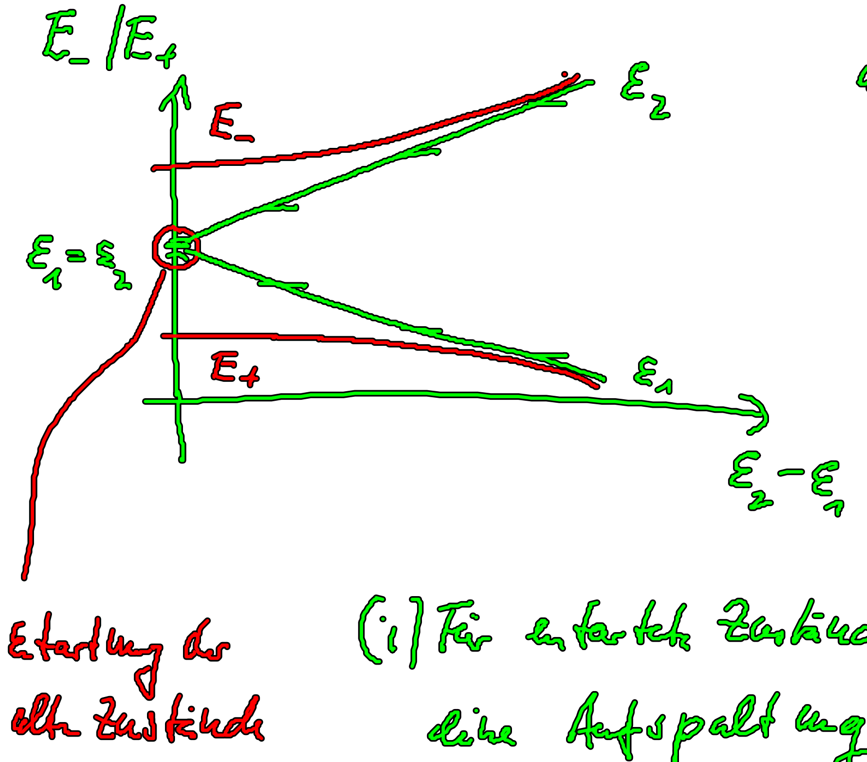
Die Diagonalelemente können immer in die ungestörten Energie mit „hineingesteckt" werden ($\tilde{\varepsilon}_2 \to \varepsilon_2$, $\tilde{\varepsilon}_1 \to \varepsilon_1$)

Zshg. zur ÜA: wenn $V_{12} = 0$ wäre,

so ist $\varepsilon_{neu} = \varepsilon_{alt} + \underline{\underline{V_{ii}}}$

diskutieren die Lösungen von entartet ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$)

bis hin zu ε_1 und ε_2 stark unterschiedlich.



wenn $V_{12} = 0$, dann

$E_+ = \varepsilon_1$, $E_- = \varepsilon_2$

(i) Für entartete Zustände gibt die WW eine Aufspaltung der Niveaus, die Verhinderung der Entartung nennt man „Anticrossing" die Aufspaltung ist $|E_+ - E_-| = 2|V_{12}|$

bei $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$

(ii) Störungstheorie im Sinne einer klein Störung V

$$E_\pm = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sqrt{1 + \frac{4|V_{12}|^2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}}$$

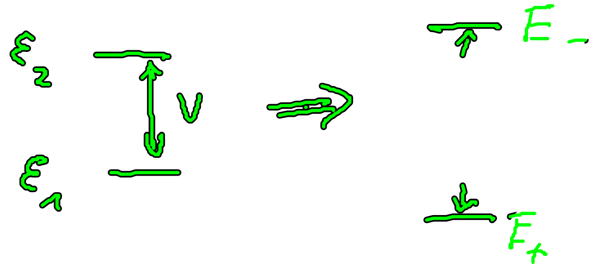
$$= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \underbrace{\left(1 + \frac{2|V_{12}|^2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} + \dots\right)}$$

Taylorreihe nach der kleinen Größe

$$\frac{4|V_{12}|^2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}$$

$$E_\pm = \begin{cases} \varepsilon_1 + \dfrac{|V_{12}|^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \varepsilon_1 - \dfrac{|V_{12}|^2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \\[2ex] \varepsilon_2 - \dfrac{|V_{12}|^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \varepsilon_2 + \dfrac{|V_{12}|^2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \end{cases}$$

Das ist die Aufspaltung zwischen die beiden Niveaus für schwache Kopplung



Niveauabstoßung

Analoge Berechnung der Wellenfunktionen:

Idee analog zu H_{S-B}: neue Eigenzustände mit Kopplung als LiKo aus den alten ($\underline{H_0}$-Eigenzustände) herzustellen

$$|\psi_+\rangle = \cos\xi\,|1\rangle + \sin\xi\,|2\rangle$$

ξ noch unbekannt

$$|\psi_-\rangle = -\sin\xi\,|1\rangle + \cos\xi\,|2\rangle$$

ψ_+, ψ_- müssen auch normiert sein, wird sichergestellt durch $\cos^2\xi + \sin^2\xi = 1$, sieht man an $\langle\psi_\pm|\psi_\pm\rangle = 1$.

$$\left.\begin{aligned} (E_+ - \varepsilon_1)\cos\xi &= V_{12}\sin\xi \\ V_{21}\cos\xi &= (E_+ - \varepsilon_2)\sin\xi \end{aligned}\right\}$$

durch einsetzen der c_i's ($\sin\xi, \cos\xi$) in die Matrixgleichg.

Bestimmungsgl. für das ξ

wird nach $tg(\xi)$ umstellen, E_+ raus werfen

$$\rightarrow \quad tg(2\xi) = \frac{2V_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

Damit ist ξ festgelegt f. jeden Satz von $V_{12} / \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

(i) entartetes System

$$tg(2\xi) = \infty \,, \quad 2\xi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \xi = \frac{\pi}{4} \qquad \cancel{tg = \frac{\sin}{\cos}}$$

Im entarteten System ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) lauten die neuen Wellenfunktionen $|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle \pm |1\rangle\right)$

Die Wellenfunktion mit Störung sind hybridisiert (komplett gemischt aus den „alten" Zuständen)

(ii) Störungstheorie $\quad V_{12} \ll (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$

$$\underbrace{tg(2\xi)}_{\text{Taylorreihe}} = \frac{2V_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \ll 1$$

$$2\xi = \frac{2V_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \longrightarrow \xi = \frac{V_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

$$|\psi_+\rangle = |1\rangle + \frac{V_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}|2\rangle$$

$$|\psi_-\rangle = |2\rangle - \frac{V_{12}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}|1\rangle$$

Bei kleinen Störungen entsteht keine komplette Hybridisierung, sondern nur eine Beimischung anderer Zustände.