Eigenwertproblem $a^+ a\, u_\lambda = \lambda\, u_\lambda$

Reihe von Eigenwerten bei bekanntem $\lambda_0$

$$\underbrace{\cdots\ \lambda_0-2,\ \lambda_0-1 \xleftarrow{a} \lambda_0 \xrightarrow{a^+} \lambda_0+1,\ \lambda_0+2\ \cdots}_{\geq 0}$$

Daher, um zu verhindern, daß Reihenglieder $< 0$ werden $a\, u_0 = 0\, u_0$, denn dann kann man Null nicht unterschreiten durch fortgesetztes Anwenden von $a$: $\underline{a\, a\, u_0 = a\, 0\, u_0 = 0}$

d) Bestimmung der Eigenfunktionen

$$u_\lambda = \alpha_\lambda \left(a^+\right)^\lambda u_0 \quad , \quad \alpha_\lambda : \text{Normierung (zu bestimmen!)}$$

$$1 = |\alpha_\lambda|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(a^{+\lambda} u_0(x)\right)^* \left(a^{+\lambda} u_0(x)\right) \qquad \text{Siehe Beweis } \lambda \geq 0$$

$$1 = |\alpha_\lambda|^2 \int dx\; a \left(a^{+\lambda} u_0(x)\right)^* \left(a^{+\lambda-1} u_0(x)\right)$$

$$= |\alpha_\lambda|^2 \int dx \; a a^+ \left(a^{+\lambda-1} u_0(x)\right)^* \left(a^{+\lambda-1} u_0(x)\right)$$

$$= |\alpha_\lambda|^2 \int dx \left[ \underbrace{\left(1 + a^+ a\right)}_{= \lambda\lambda} \left(a^{+\lambda-1} u_0(x)\right)\right]^* \left(a^{+\lambda-1} u_0(x)\right)$$

$$1 = |\alpha_\lambda|^2 \left( \underline{\underline{\frac{1}{|\alpha_{\lambda-1}|^2}}} + \frac{\lambda-1}{|\alpha_{\lambda-1}|^2} \right)$$

$$|\alpha_\lambda|^2 = \frac{|\alpha_{\lambda-1}|^2}{\lambda}$$ rekursive Formel für $\forall \alpha_\lambda$

$$|\alpha_1|^2 = \frac{|\alpha_0|^2}{1}, \quad |\alpha_2|^2 = \frac{|\alpha_1|^2}{2} = \frac{|\alpha_0|^2}{1 \cdot 2}$$

$$|\alpha_3|^2 = \frac{|\alpha_2|^2}{3} = \frac{|\alpha_0|^2}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}_{3! \; (\lambda = 3)}}, \quad \ldots$$

$$|\alpha_\lambda|^2 = \frac{1}{\lambda!},$$ wenn $\alpha_0 = 1$, also $u_0$ schon normiert

Die Zustände sind $u_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda!}} \, a^{+\lambda} \, u_0(x)$

$(\lambda = 1, 2, 3 \dots)$

$u_0$ ist noch unbekannt, wenn das bekannt ist, sind alle $u_\lambda$ berechenbar.

e) Bestimmung von $u_0$:

$a\, u_0(x) = 0$ bekannt als Abbruchbedingg.

wird als Dgl. für $u_0(x)$ aufgefaßt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x + \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \frac{d}{dx}\right) u_0(x) = 0$$

$$u_0(x) = (m\omega\pi\hbar)^{1/4} \cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\int dx\, u_0^*(x)\, u_0(x) = 1 \quad (\alpha_0 = 1)$$

Zusammenfassung der Ergebnisse

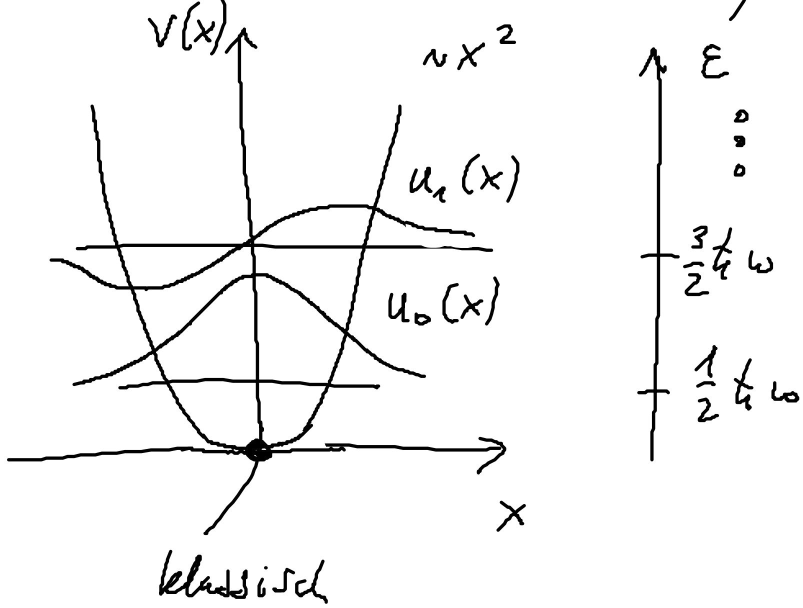
- Der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators in $a, a^+$ lautet $H = \hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)$

- Eigenwertproblem $H u_n = \varepsilon_n u_n$ $(n \Leftrightarrow \lambda)$

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^+\right)^n u_0(x), \quad u_0 : \text{Gauß}$$

$$\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

- Grundzustandsenergie ist $\frac{\hbar\omega}{2} \neq 0$
(Ort - Impuls Unschärfe)




- Die Leiteroperatoren (Vernichter $a$, Erzeuger $a^+$)

werden sich grundlegende Objekte der QFT herausstellen, dazu 2 Zweizeiler:

$$a^+ u_n = a^+ \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{+n} u_0 = \sqrt{n+1}\, \frac{a^{+\,n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} u_0$$

$$\boxed{a^+ u_n = \sqrt{n+1}\; u_{n+1}}$$ , analog:

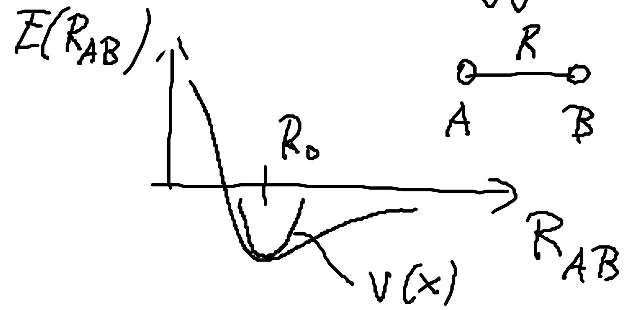
$$\boxed{a\, u_n = \sqrt{n}\; u_{n-1}}$$

Offensichtlich bewegt man sich auf der Zustandsleiter durch Anwendung der $a^+$, $a$ nach oben bzw. unten

$$\left.\begin{array}{ll} & u_{n+1} \\ a^+ \uparrow & u_n \\ a \downarrow & u_{n-1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{1 Quant wird erzeugt } (a^+) \\ \text{oder} \\ \text{vernichtet } (a) \end{array}$$

Man spricht von einem System $(u_n)$ von $n$ - Schwingungsquanten

## Beispiel: Molekülschwingg. $H_2^+$




° $a^+ a$ wird Teilchenzahloperator genannt ($\underline{n}$)

$$\underline{n} \equiv a^+ a$$

$$\underline{n}\, u_n = n\, u_n$$

Anzahl der Quanten

## 2.) Das Heisenbergbild der Quantenmechanik

**bisher:** Schrödingergleichung: $\boxed{i\hbar \dot{\psi}_s = \underline{H}_s \psi_s}$

Erwartungswerte $\langle \psi_s | \underline{O}_s | \psi_s \rangle$

→ Schrödingerwellenfunktion trägt Zeitabhängigkeit:

$\boxed{\psi_S(r, t)}$, | die Operatoren sind höchstens explizit zeitabhängig
?

Kann die Zeitabhängigkeit auch von Operatoren getragen werden?

jetzt Heisenberggleichung: $\boxed{i\hbar \dot{\underline{O}}_H = [\underline{O}_H, \underline{H}_H] + i\hbar \left(\frac{\partial \underline{O}_H}{\partial t}\right)_{\alpha}}$

Erwartungswerte $\langle \psi_H | \underline{O}_H | \psi_H \rangle$

→ Heisenbergoperatoren tragen die Zeitabhängigkeit

$\boxed{\underline{O}_H(r, t)}$

Heisenbergbild ist wichtig f. Feldquantisierung.

Schrödingerbild + Heisenbergbild geben äquivalente Aussagen

3 Schritte zum Heisenbergbild (a–c)

<u>a) Zeitentwicklungsoperator $U(t, t_0)$</u> $(t_0 \longrightarrow t)$

$U$ einführen, Ansatz $\psi_S(r, t) = \underline{U}(t, t_0)\, \psi_S(r, t_0)$

$\psi_S(r, t_0)$ Anfangsbedingg., einsetzen

$$i\hbar\, \partial_t \left(\underline{U}(t, t_0)\, \psi_S(r, t_0)\right) = \underline{H}\, \underline{U}(t, t_0)\, \psi_S(r, t_0)$$

$$i\hbar\, \dot{\underline{U}}(t,t_0)\, \psi_S = \underline{H}\, \underline{U}(t,t_0)\, \psi_S \qquad (\forall \psi_S)$$

$$\boxed{i\hbar\, \dot{\underline{U}}(t,t_0) = \underline{H}\, \underline{U}(t,t_0)}$$

Operatorgleichung für den Zeitentwicklungsoperator $\underline{U}$,

Anfangsbedingg. $\underline{U}(t_0,t_0) = \underline{1}$

$\underline{U}$ ist ein <u>unitärer</u> Operator:

$$\underline{\underline{U^{-1}}}\,\underline{U} = \underline{1} = \underline{\underline{U^{+}}}\,\underline{U}\,, \qquad U^{+} = U^{-1}$$

$$\underline{U}(t,t_0) = \underline{1} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, \underline{H}(t')\, \underline{U}(t_0,t')$$

$$\underline{U}^{+}(t,t_0) = \underline{1} - \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, \underline{U}^{+}(t_0,t')\, \underline{H}(t')$$

Beweis von $U^{+} = U^{-1}$ durch Iteration der Gleichung und gliedweises Ausmultiplizieren. (<u>hier nicht</u>)

b) Konstruktion des Heisenbergbilds

__Schrödingerbild__ $\boxed{\Psi_S(r,t) = \underline{U}(t,t_0)\,\Psi_S(r,t_0)}$ __Heisenbergbild__

$$\Psi_S(r,t) \xrightarrow{\text{Definition}} \Psi_H(r,t_0) = \underline{U}^{-1}(t,t_0)\,\Psi_S(r,t)$$

$$\underline{O}_S \longrightarrow \underline{O}_H(t) = \underline{U}^{-1}(t,t_0)\,\underline{O}_S\,\underline{U}(t,t_0)$$

Beispiel für explizite Zeitabhängigkeit (*)

$$H_S = \frac{p_S^2}{2m} + \vec{r}_S \cdot \underbrace{\vec{E}(t)}_{*}\, q$$

Die Erwartungswerte __und__ alle anderen beobachtbaren Größe hängen __nicht__ vom verwendeten Bild ab:

$$\underbrace{\langle \Psi_H | \underline{O}_H | \Psi_H \rangle}_{\shortparallel} \overset{!}{=} \langle \Psi_S | O_S | \Psi_S \rangle$$

$$\langle \underline{U}^{-1}\Psi_S | \underline{U}^{-1} \underline{O}_S \underline{U} | \underline{U}^{-1}\Psi_S \rangle =$$

$$\langle \Psi_S | \underbrace{(\underline{U}^{-1})^{+}\,\underline{U}^{-1}}_{\underbrace{U U^{-1}}} \underline{O}_S \underbrace{\underline{U}\,\underline{U}^{-1}}_{\underline{1}} | \Psi_S \rangle = \langle \Psi_S | \underline{O}_S | \Psi_S \rangle$$

Daher ist es egal in welchem Bild man rechnet, eine Formulierung der QFT in zeitabhängigen Operatoren ist möglich.

## c) Heisenberg-Bewegungsgleichung f. Operatoren

Idee: Zeitdynamik der Schrödingergl. wird durch Zeitdynamik einer Operatorgl. ersetzt (Heisenberg-Bewegungsgleichung)

$$\frac{d}{dt} O_H = ? = \frac{d}{dt}\left(U^{-1} O_S U\right) =$$

$$\underbrace{\dot{U}^{-1} O_S U + U^{-1} O_S \dot{U}}_{-\frac{1}{i\hbar} U^{+} H O_S U + U^{-1} O_S \frac{1}{i\hbar} H U} + \underbrace{U^{-1} \frac{\partial}{\partial t} O_S U}_{\partial_t O_H |_{ex}}$$

$\to 1$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\left(\underbrace{\underline{u}^{+}\underline{H}\,u}\overbrace{\underbrace{u^{-1}O_S u}} - u^{-1}O_S u u^{-1} H u\right) + \partial_t \underline{O}_H\Big|_{\alpha}$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\left(\underline{H}_H\,\underline{O}_H - \underline{O}_H\,\underline{H}_H\right) + \partial_t \underline{O}_H\Big|_{\alpha}$$

$$\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}\underline{O}_H = \left[\underline{O}_H, \underline{H}_H\right] + \partial_t \underline{O}_H\Big|_{\alpha} i\hbar}$$

Heisenberg - Bewegungsgleichung f. Operatoren

Damit kann die Dynamik von Operatoren berechnet werden, bei bekannten Anfangsbedingungen $\psi_S(r,t_0) = \psi_H(r,t_0)$ kann $\langle \underline{O} \rangle = \langle \psi_H | \underline{O}_H | \psi_H \rangle$

## d) Harmonischer Oszillator im Heisenbergbild

$$u(t,t_0) = \underline{1} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' \underbrace{\left(a^{+}a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega}_{H_S}\, u(t',t_0)$$

zur Berechnung des Zeitentwicklungsoperators.

$$u = e^{\frac{1}{i\hbar}\hbar\omega\left(a^{+}a+\frac{1}{2}\right)(t-t_0)} = u(t,t_0)$$

Heisenberggleichungen f. $a^+ \to a_H^+(t)$:

$$i\hbar \dot{a}^+ = [a^+, H] + \underbrace{\left(\frac{\partial a^+}{\partial t}\right)_{ex}}_{\frac{\partial a_S^+}{\partial t} = 0}$$

$$i\hbar \dot{a}^+ = [a^+, \hbar\omega(a^+a + \tfrac{1}{2})]$$

$$= [a^+, \hbar\omega(a^+a)]$$

$$= (a^+ \underline{a^+ a} - a^+ a a^+)\hbar\omega \quad \text{mit } [a, a^+] = 1$$

$$= \hbar\omega(a^+(aa^+ - 1) - a^+ a a^+)$$

$$\boxed{i\hbar \dot{a}^+ = -\hbar\omega a^+}$$

? später

$$a^+(t) = e^{i\omega(t-t_0)} a^+(t_0)$$

Für den eindimensionale harmonische Oszillator findet man eine einfache Schwingung als Lösung ($e^{i\omega t}$).