

Eigenwertproblem $a^+ a u_\lambda = \lambda u_\lambda$

Reihe von Eigenwerten bei bekanntem λ_0 .

$$\dots \lambda_{0-2}, \lambda_{0-1}, \lambda_0, \lambda_{0+1}, \lambda_{0+2} \dots$$

≥ 0

Daher, um zu verhindern, daß Reihenglieder < 0

werden $a u_0 = 0 u_0$, denn dann

kann man Null nicht unterschreiten durch

fortgesetzte Anwendung von a : $a a u_0 = a 0 u_0 = 0$

d) Bestimmung der Eigenfunktionen

$$u_\lambda = \alpha_\lambda (a^+)^{\lambda} u_0, \quad \alpha_\lambda: \text{Normierung (zu bestimmen!)}$$

$$1 = |\alpha_\lambda|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \underbrace{(a^{+\lambda} u_0(x))^* (a^{+\lambda} u_0(x))}_{\text{Sich Beweis } \lambda \geq 0}$$

$$1 = |\alpha_\lambda|^2 \int dx a (a^{+\lambda} u_0(x))^* (a^{+\lambda-1} u_0(x))$$

$$= |\alpha_\lambda|^2 \int dx a a^\dagger (a^{+\lambda-1} u_0(x))^* (a^{+\lambda-1} u_0(x))$$

$$= |\alpha_\lambda|^2 \int dx \left[\underset{= \text{un}}{\underbrace{(1 + a^\dagger a)}} (a^{+\lambda-1} u_0(x))^* \right] (a^{+\lambda-1} u_0(x))$$

$$1 = |\alpha_\lambda|^2 \left(\frac{1}{|\alpha_{\lambda-1}|^2} + \frac{\lambda-1}{|\alpha_{\lambda-1}|^2} \right)$$

$$|\alpha_\lambda|^2 = \frac{|\alpha_{\lambda-1}|^2}{\lambda} \quad \text{rekursive Formel für } \forall \alpha_\lambda$$

$$|\alpha_1|^2 = \frac{|\alpha_0|^2}{1}, \quad |\alpha_2|^2 = \frac{|\alpha_1|^2}{2} = \frac{|\alpha_0|^2}{1 \cdot 2}$$

$$|\alpha_3|^2 = \frac{|\alpha_2|^2}{3} = \frac{|\alpha_0|^2}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}_{3!}} , \dots$$

$$|\alpha_\lambda|^2 = \frac{1}{\lambda!}, \quad \text{wenn } \alpha_0 = 1, \text{ also } u_0 \text{ schon normiert}$$

$$\text{Die Zustände sind } u_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda!}} a^{+\lambda} u_0(x)$$

$$(\lambda = 1, 2, 3 \dots)$$

u_0 ist noch unbekannt, wenn das bekannt ist,
sind alle u_1 berechenbar.

e) Bestimmung von u_0 :

a $u_0(x) = 0$ bekannt als Abbruchbedingung.

wird als Dgl. für $u_0(x)$ aufgefäßt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} x + \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2} \frac{d}{dx} \right) u_0(x) = 0$$

$$u_0(x) = \left(m\omega \pi \hbar \right)^{1/4} \cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

$$\int dx u_0^*(x) u_0(x) = 1 \quad (\alpha_0 = 1)$$

Zusammenfassung der Ergebnisse

• Der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators in q, p lautet $H = \frac{1}{2} \omega (a^\dagger a + \frac{1}{2})$

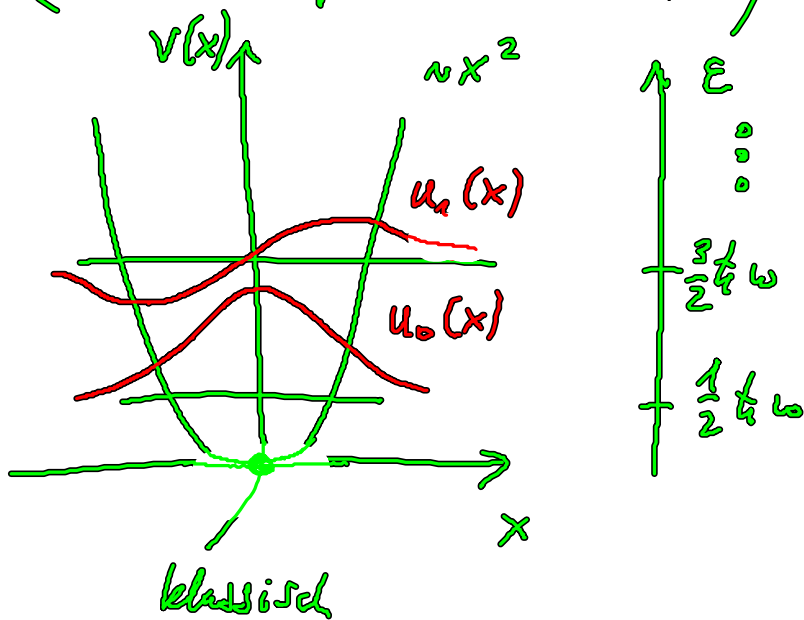
• Eigenwertproblem $H u_n = \epsilon_n u_n \quad (u \leftrightarrow \lambda)$

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n u_0(x), \quad u_0: \text{Gauß}$$

$$\epsilon_n = \frac{1}{2} \omega (n + \frac{1}{2})$$

• Grundzustandsenergie ist $\frac{1}{2} \omega \neq 0$

(Orb - Impuls Ausdruck)



• Die Leiteroperatoren (Kombi aus a , Erzeuger a^\dagger)

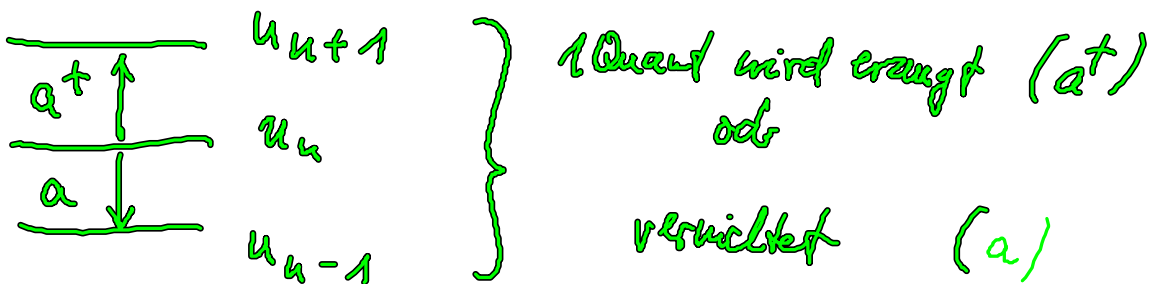
werden sich grundlegende Objekte der QFT herausstellen, dazu 2 Zweiziter:

$$a^\dagger u_n = a^\dagger \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{+n} u_0 = \sqrt{n+1} \frac{a^{+(n+1)}}{\sqrt{(n+1)!}} u_0$$

$$\boxed{a^\dagger u_n = \sqrt{n+1} u_{n+1}} \quad , \quad \text{analog:}$$

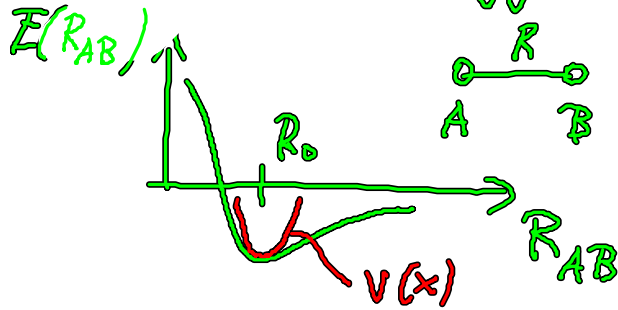
$$\boxed{a u_n = \sqrt{n} u_{n-1}}$$

Offensichtlich bewegt man sich auf der Zustandsleiter durch Anwendung der a^\dagger , a nach oben bzw. unten



Man spricht von einem System (u_n) von n - Schwingungsquanten

Beispiel: Molekülschwingung H_2^+



• $a^\dagger a$ wird Teilchenzahloperator genannt (n)

$$\underline{n} \equiv a^\dagger a$$

$$\underline{n} u_n = n u_n$$

↑

Anzahl der Quanten

2.) Das Heisenbergbild der Quantenmechanik

bisher: Schrödingergleichung: $i\hbar \dot{\psi}_s = H_s \psi_s$

Erwartungswerte $\langle \psi_s | O_s | \psi_s \rangle$

→ Schrödingerwellenfunktion besitzt Zeitabhängigkeit:

$\psi_S(r, t)$, die Operatoren sind höchstens explizit zeitabhängig

Kann die Zeitabhängigkeit auch von Operatoren getrennt werden?

geht

Heisenberggleichung:
$$i\hbar \underline{\partial}_t = [\underline{Q}_H, \underline{H}_H] + i\hbar \left(\frac{\partial \underline{Q}_H}{\partial t} \right)$$

Erwartungswerte $\langle \psi_H | \underline{Q}_H | \psi_H \rangle$

→ Heisenbergoperatoren haben die Zeitabhängigkeit

$$\underline{Q}_H(r, t)$$

Heisenbergbild ist wirklich f. Feldquantisierung.

Schrödingersbild + Heisenbergbild geben äquivalente Aussagen

3 Schritte zum Heisenbergbild (a-c)

a) Zeitentwicklungsoperator $U(t, t_0)$ ($t_0 \rightarrow t$)

U einführen, Ansatz $\psi_S(r, t) = U(t, t_0) \psi_S(r, t_0)$

$\psi_S(r, t_0)$ Anfangsbedingung, einsetzen

$$i\hbar \partial_t (U(t, t_0) \psi_S(r, t_0)) = \underline{H} U(t, t_0) \psi_S(r, t_0)$$

$$i\hbar \dot{\underline{u}}(t, t_0) \varphi_s = \underline{H} \underline{u}(t, t_0) \varphi_s \quad (\neq \varphi_s)$$

$$\boxed{i\hbar \dot{\underline{u}}(t, t_0) = \underline{H} \underline{u}(t, t_0)}$$

Operatorgleichung für den Zeitentwicklungsoperator \underline{u} ,
Anfangsbedingung $\underline{u}(t_0, t_0) = \underline{1}$

\underline{u} ist ein unitärer Operator:

$$\underline{u}^{-1} \underline{u} = \underline{1} = \underline{u}^\dagger \underline{u}, \quad u^\dagger = u^{-1}$$

$$\underline{u}(t, t_0) = \underline{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \underline{H}(t') \underline{u}(t_0, t')$$

$$\underline{u}^\dagger(t, t_0) = \underline{1} - \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \underline{u}^\dagger(t_0, t') \underline{H}(t')$$

Beweis von $u^\dagger = u^{-1}$ durch

Iteration der Gleichung und gliedweises

Ausmultiplizieren. (hier nicht)

b) Konstruktion des Weissbildes

Schrodingerbild $\left(\psi_s(r, t) = U(t, t_0) \psi_s(r, t_0) \right)$ Heisenbergbild

$$\psi_s(r, t) \xrightarrow{\text{Definition}} \psi_H(r, t_0) = \underline{U}^{-1}(t, t_0) \psi_s(r, t)$$

$$\underline{O}_S \xrightarrow{\quad\quad\quad} \underline{O}_H(t) = \underline{U}^{-1}(t, t_0) \underline{O}_S \underline{U}(t, t_0)$$

Beispiel für explizite Zeitabhängigkeit (*)

$$H_S = \frac{p_S^2}{2m} + \vec{r}_S \cdot \vec{E}(t) q$$

↑
*

Die Erwartungswerte und alle anderen beobachtbaren Größe hänge wirt von wenn das Bild ab:

$$\langle \psi_H | \underline{O}_H | \psi_H \rangle \stackrel{!}{=} \langle \psi_S | \underline{O}_S | \psi_S \rangle$$

||

$$\langle \underline{U}^{-1} \psi_S | \underline{U}^{-1} \underline{O}_S \underline{U} | \underline{U}^{-1} \psi_S \rangle =$$

$$\langle \psi_S | \underbrace{(\underline{U}^{-1})^\dagger \underline{U}^{-1}}_{\underline{U} \underline{U}^{-1}} \underline{O}_S \underbrace{\underline{U} \underline{U}^{-1}}_1 | \psi_S \rangle = \langle \psi_S | \underline{O}_S | \psi_S \rangle$$

Daher ist es egal in welche Bild man rednet,
eine Formulierung der QFT in zeitabhängiger
Operatoren ist möglich.

c) Heisenberg - Bewegungsgleichung f. Operatoren

Idee: Zeitdynamik der Schrödingergl. wird durch
Zeitdynamik linear Operatorgl. ersetzt
(Heisenberg - Bewegungsgleichung)

$$\frac{d}{dt} \underline{O}_H = ? = \frac{d}{dt} (\underline{U}^{-1} \underline{O}_S \underline{U}) =$$

$$\underbrace{\underline{U}^{-1} \underline{O}_S \underline{U} + \underline{U}^{-1} \underline{O}_S \dot{\underline{U}}}_{\text{}} + \underbrace{\underline{U}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \underline{O}_S \underline{U}}_{\text{}}$$

$$-\frac{1}{i\hbar} \underline{U}^{-1} \underline{H} \underline{O}_S \underline{U} + \underline{U}^{-1} \underline{O}_S \underline{U} \frac{1}{i\hbar} \underline{H} \underline{U} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{O}_H /_{\text{ex}}$$

→ 1

$$= -\frac{1}{i\hbar} \left(\underbrace{u^\dagger H u}_{H_H} - u^{-1} O_S u u^{-1} H u \right) + \partial_t \frac{O_H}{\hbar}$$

$$= -\frac{1}{i\hbar} \left(\underline{H_H} \underline{O_H} - \underline{O_H} \underline{H_H} \right) + \partial_t \frac{\underline{O_H}}{\hbar}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \underline{O_H} = [\underline{O_H}, \underline{H_H}] + \partial_t \frac{\underline{O_H}}{\hbar}$$

Heisenberg - Bewegungsgleichung f. Operatoren

Damit kann die Dynamik von Operatoren berechnet werden,
bei bekannten Anfangsbedingungen $\psi_S(r, t_0) = \psi_H(r, t_0)$

$$\text{kan } \langle \underline{O} \rangle = \langle \psi_H | \underline{O_H} | \psi_H \rangle$$

d) Harmonischer Oszillator im Heisenbergbild

$$U(t, t_0) = \underline{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \underbrace{\left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)}_{H_S} \hbar \omega U(t', t_0)$$

zur Bestimmung des Zeitentwicklungsoperators.

$$U = e^{\frac{1}{i\hbar} \hbar \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) (t - t_0)} = U(t, t_0)$$

Heisenberggleichung f. $a^+ \rightarrow a^+(t)$:

$$i\hbar \dot{a}^+ = [a^+, H] + \underbrace{\left(\frac{\partial a^+}{\partial t} \right)_a}_{\frac{\partial a^+}{\partial t} = 0}$$

$$i\hbar \dot{a}^+ = [a^+, \hbar\omega (a^+ a + \frac{1}{2})]$$

$$= [a^+, \hbar\omega (a^+ a)]$$

$$= (a^+ a^+ a - a^+ a a^+) \hbar\omega \quad \text{mit } [a^+, a^+] = 1$$

$$= \hbar\omega (a^+ (a a^+ - 1) - a^+ a a^+)$$

$$\boxed{i\hbar \dot{a}^+ = -\hbar\omega a^+}$$

$$a^+(t) = e^{i\omega(t-t_0)} a^+(t_0)$$

? später

Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator
findet man eine einfache Schwingung
als Lösung ($e^{i\omega t}$).