6. Quantisierung des elektromagnetischen Felds

6.1. Feldquantisierung über Lagrangetechnik (a-g)

a) Lagrangedichte f. elektromagnetisch Feld

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r},t) - \mu_0^{-1} \vec{B}^2(\vec{r},t)\right) \quad \text{(geraten!)}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

wenn man keine Quellen hat, d.h. Feldquantisierung im Vakuum so: $\phi = 0$,

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{3}\left(\varepsilon_0 \dot{A}_e^2 - \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{A})_e^2\right)$$

Wahl: Quantisierung des $\vec{A}$ Felds

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) = (A_x, A_y, A_z)$$

Die Richtigkeit von $\mathcal{L}$ muß bewiesen werden:

→ Maxwellgleichungen

zeigen Maxwellgleichungen für A_x:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x} - \sum_u \partial_u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_u(\partial_u A_x)} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_x} = 0$$

gibt Bewegungsgleichungen f. Felder: $\mathcal{L}(A_i, \partial_u A_i, \dot{A}_i)$

$$0 = 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\sum_u \partial_u\, 2(\vec{\nabla}\times\vec{A})_\ell\, \underbrace{\partial_{\partial_u A_x}(\varepsilon_{\ell jk}\partial_j A_k)}_{\delta_{ju}\delta_{kx}\varepsilon_{\ell jk}} - \varepsilon_0 \partial_t \dot{A}_x$$

$$0 = \underbrace{\frac{1}{\mu_0}\sum_u \partial_u B_\ell\, \varepsilon_{\ell u x}}_{\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x} - \varepsilon_0 \partial_t E_x$$

$$\Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{B})_x = -\frac{1}{c^2}\partial_t E_x$$

$\rightarrow$ $\mathcal{L}$ stimmt so!

b) Impuls Π_{A_x} zu A_x einführen:

$$\Pi_{A_x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_x} = \varepsilon_0 \dot{A}_x = -\varepsilon_0 E_x$$

Die konjugierten Feldvariablen sind A_x und E_x, diese vertauschen nicht mehr.

c, d) Formulierung von Vertauschungsrelationen für die Operatoren A_x, Π_{A_x}

$$\left[A_l(\vec{r},t),\ E_m(\vec{r}\,',t)\right] \simeq \frac{i\hbar}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta_{lm}$$

wird gefordert! und muß etwas modifiziert werden um $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ zu erhalten (hier nicht)

e) Hamiltondichte und Hamiltonoperator

$$\mathcal{H} = \dot{\vec{A}}\cdot\vec{E}\,\varepsilon_0 - \mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

$$\underline{H} = \int d^3r \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\partial_t \underline{\vec{A}}(r,t)\right]^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left[\vec{\nabla}\times\underline{\vec{A}}(r,t)\right]^2\right)$$

f) Bewegungsgleichg. f. Feldoperatoren $\vec{A}, \vec{E}$

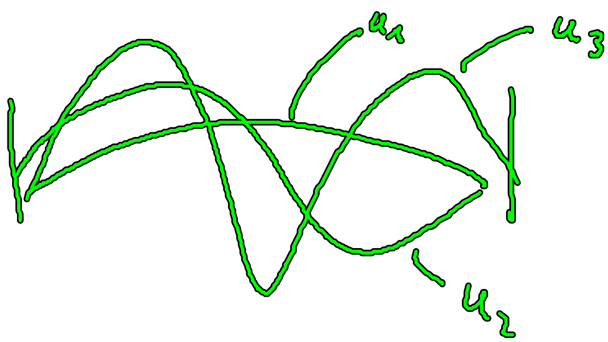
wir gehen gleich zu Moden

g) Entwicklg. nach Feldmoden

$$\underline{A}(r,t) = \sum_n u_n(r)\, a_n(t) + h.a.$$

vollständiges System

Operatorcharakter



Resonator

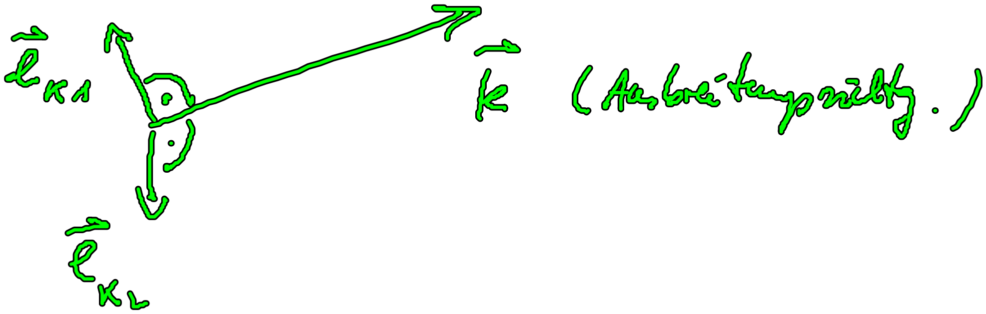
$\square \vec{A} = 0$ wird analog der Schrödingergleichung

$i\hbar \partial_t \Psi - \underline{H}\Psi = 0$ nach Moden entwickelt

$$\underline{\Psi} = \sum_i \varphi_i(r)\, a_i(t)$$

$$\underline{\vec{A}} = \sum_{k\lambda=1,2} f_k \vec{e}_{k\lambda} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} \underbrace{e^{-i\omega_k t} c_{\lambda k}}_{c_{\lambda k}(t)} + h.a.$$

entwickeln nach ebenen Wellen (Summe über alle k, λ)



f_k, $L^{3/2}$ Normierungs- und Einheitenfestlegung

$$f_k = \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c|k|}\right)^{1/2}, \quad \omega_k = c|k|$$

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} = \sum_{k\lambda} i\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 L^3}\right)^{1/2} \vec{e}_{k\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega_k t}\, c_{\lambda k} + h.a.$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \sum_{k\lambda} \ldots$$

einsetzen in $\underline{H}$:

$$\underline{H} = \frac{1}{2}\int d^3r \left(\varepsilon_0 \dot{\vec{A}}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}\times\vec{A}^2\right) = f(c^+, c)$$

ohne Beweis:

$$\boxed{\underline{H} = \sum_{\lambda k} \hbar\omega_k \left(c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} + \frac{1}{2}\right)}$$

ist der Hamiltonoperator des Strahlungsfelds im freien Raum

Bemerkungen :

a) Das Strahlungsfeld im freien Raum ist durch einen Satz von harmonischen Oszillatoren gegeben: Jede Mode k, λ besitzt eine festgelegte Anzahl von Photonen

b) Photonen sind Bosonen, daher:

$$[c_{\lambda k}, c^{+}_{\lambda' k'}] = \delta_{\lambda\lambda'}\, \delta_{kk'}$$

$$[c^{(+)}_{\lambda k}, c^{(+)}_{\lambda' k'}] = 0$$

c) Gesamteigenwertproblem : $\underline{H} |\psi\rangle = E|\psi\rangle$ wird wieder durch Produktzustände $\prod_{k\lambda} |n_{k\lambda}\rangle = |\psi\rangle$

$$E = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_{\lambda k}\left(n_{\lambda k} + \frac{1}{2}\right)$$ gelöst.

wegen Produktzuständen stellen Photonen interessante Objekte f. Quanteninfo dar.

d) Quantisierung des Strahlungsfeld erklärt 2 wichtige Effekte:

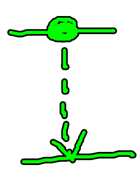
<u>Lambshift</u>: Dirac H-Atom

→ Aufspaltung: $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ –
Entartung wird aufgehoben

<u>spontane Emission</u>:

wegen $\sum_{k\lambda} \frac{1}{2}\hbar\omega_k$ $\exists$ ein Strahlungsfeld auch

wenn <u>keine</u> Photon meßbar ($n_{k\lambda} = 0$)



erlaubt im Gegensatz zu klassisch elektromagn. Feld die Emission von Photon durch Übergang in Grundzustand

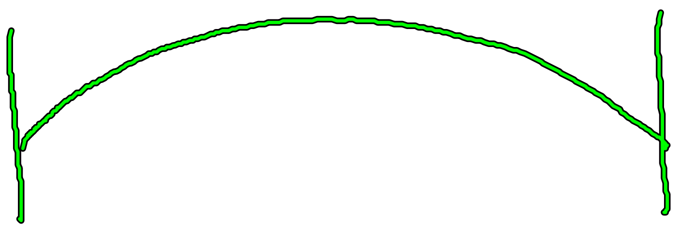
6.2. Wichtige Zustände des Strahlungsfelds

diskutieren nur 1 Mode $c_{k\lambda} \to c$

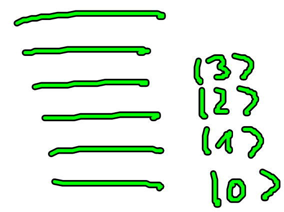
$$C^+_{k\lambda} \to C^+ , \quad \hbar\omega_k \to \hbar\omega$$

$$\underline{H} = \left(c^+ c + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Zustandssystem:



Einzelmode Laser



sind Zustände mit 0, 1, 2, 3 ... Photonen in der ausgewählten Mode

$$\underline{H}\,|n\rangle = \varepsilon_n\,|n\rangle$$

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(c^+\right)^n |0\rangle$$

allgemeiner Zustand: $|\phi\rangle = \sum_n w_n\,|n\rangle$

(kann immer so geschrieben werden)

$|w_n|^2$: Wahrscheinlichkeit n-Photonen zu messen

6.2.1 Meßgrößen: Erwartungswert und Schwankg. von Feldstärke und Photonenzahl

$$\underline{E} = E_0(\vec r)\,\big(c(t) - c^+(t)\big)\,, \quad E_0(\vec r) = i\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 L^3}\right)^{1/2} e^{i\vec k\vec r}$$

(Feld für 1 Mode)

$$\langle \underline{E} \rangle = \langle \phi | \underline{E} | \phi \rangle = ?$$

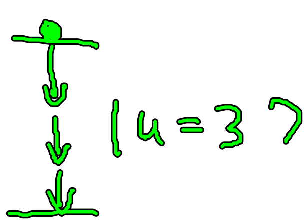
$$\Delta E^2 = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = ? \qquad \text{Standardabweichg.}$$

$$= \langle \underline{E}^2 \rangle - \langle \underline{E} \rangle^2 = ?$$

Analog. für Photonenzahl

6.2.2. Der Photonenzahlzustand $|n\rangle$

ist ein Zustand der bei spontaner Emission eines Atoms erzeugt wird: (wäre zu zeigen)



$\boxed{\text{Photonenzahl}}$ $\quad \langle n | \underbrace{\underline{n}}_{c^+c} | n \rangle = \langle \underline{n} \rangle = n$ Photonen

$$\langle n|\underline{n}^2|n\rangle = n^2$$

Der Erwartungswert der Photonenzahl ist genau $n = \langle \underline{n}\rangle$, die Abweichung von $\langle \underline{n}\rangle$ ist $\Delta n^2 = \langle \underline{n}^2\rangle - \langle \underline{n}\rangle^2 = 0$

$\boxed{\text{Feldstärke}}$ $\langle n|\underline{E}|n\rangle = E_0 \langle n|c - c^+|n\rangle$

$$= E_0\left(\langle n|c|n\rangle - \langle n|c^+|n\rangle\right)$$

$$= E_0\left(\sqrt{n}\,\langle n|n-1\rangle - \sqrt{n+1}\,\langle n|n+1\rangle\right)$$

$\langle \underline{E}\rangle = 0$ Der Mittelwert d. Feldstärke verschwindet.

$$\langle n|\underline{E}^2|n\rangle = E_0^2\,\langle n|(c^+ - c)^2|n\rangle$$

$$= -|E_0|^2\,\langle n|\,\underbrace{c^+c^+}_{=0} - c^+c \underbrace{- c\,c^+}_{\text{vertausch.}} + \underbrace{cc}_{=0}\,|n\rangle$$

$$= -|E_0|^2\left(-n - (n+1)\right)$$

$$= |E_0|^2\,(2n+1)$$

$$\Delta E^2 = (2n+1)|E_0|^2$$

Die mittlere Schwankg. des E-Felds um den Erwartungswert 0 ist $\sqrt{\overline{\Delta E^2}} = \sqrt{2n+1}\,|E_0|$

Quantenmechanische Interpretation:

Es existiert ein Unschärfe zwischen Phasen und Intensität.

6.2.3 Der kohärente Zustand $|\alpha\rangle$

$|\alpha\rangle$ ist ein Überlagerungszustand aus vielen Photonzahlzuständen

$$|\alpha\rangle = \sum_n w_n(\alpha)\,|n\rangle = \sum_n \underbrace{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}_{\substack{\text{sichert}\\ \langle\alpha|\alpha\rangle = 1}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

α - komplexe Zahl

$|\alpha\rangle$ ist ein Eigenzustand von c

$c\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$ (einsetzen und mit Summenindizes schieben)

Photonenzahl

$$\langle \underline{n} \rangle = \langle \alpha | \underline{n} | \alpha \rangle = \underbrace{\langle \alpha | c^+}_{\alpha^*} \underbrace{c | \alpha \rangle}_{\alpha} = |\alpha|^2$$

$$\Delta n^2 = |\alpha|^2$$

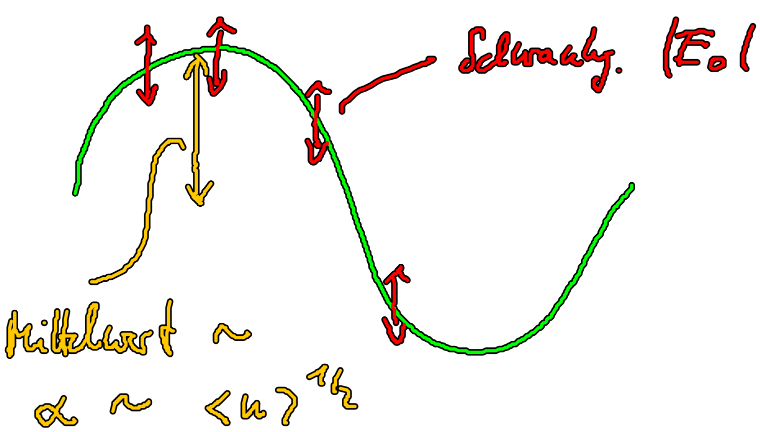
Feld

$$\langle \underline{E} \rangle = \langle \alpha | E_0 (c - c^+) | \alpha \rangle$$

$$= E_0 (\alpha - \alpha^*) = \text{endlich!}$$

$$\Delta E^2 = |E_0|^2$$

Der kohärente Zustand gibt ein endlich Erwartungswert f. die Feldstärke mit Schwankg.



Je mehr Photonen im Strahlengang $\alpha \uparrow$

$\longrightarrow$ relative Schwankung $\dfrac{\Delta E}{\langle E \rangle} = \dfrac{1}{|\alpha|} \to 0$

$\left(|\alpha|^2 \sim \langle n \rangle \right)$

Bei großen Intensitäten kann das Feld klassisch beschrieben werden, bei kleinen werden Quanteneigenschaften wichtig weil dann die Schwankungen in der Größenordnung der Mittelwerts sind.

Kohärente Zustände entstehen bei der Emission von Strahlung aus klassischen Strömen (Dipolen) = Antennen.