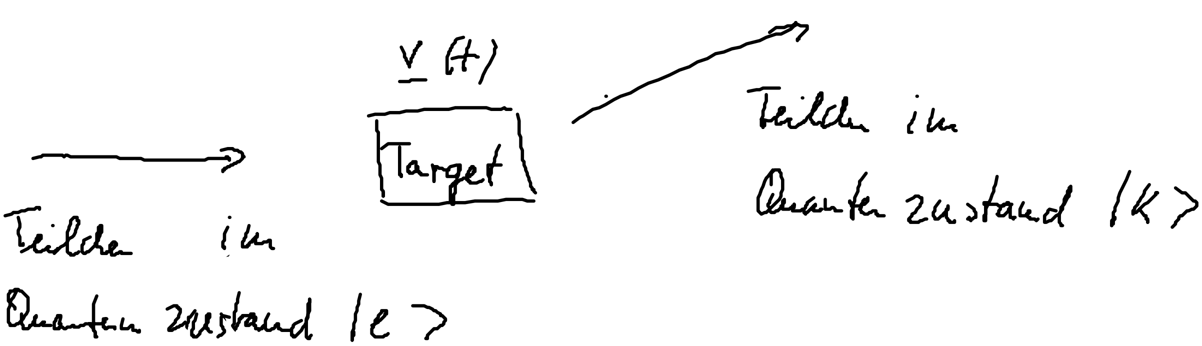
7. Streutheorie

7.1. Zugang über Mastergleichung

in Lehrbüchern sehr oft über Wellenfunktion $\Psi(\vec{r},t)$,
hier etwas allgemeinere Formulierung

Streutheorie beschäftigt sich mit Wechselwirkung von Teilchen (Elektronen, Neutronen ...) mit anderen Teilchen oder Potentialen $\underline{V}(t)$

Für gebundene Zustände müssen nichtstörungstheoretische Zugänge verwendet werden



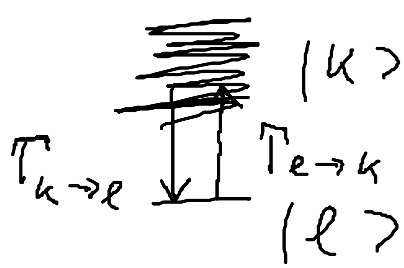
Mastergleichungen für Wahrscheinlichkeiten für die Besetzung eines Zustands l : (Kapitel 3.2.4)

$$\dot{\rho}_{ll} = -\sum_k \Gamma_{l\to k}\,\rho_{ll} + \sum_k \Gamma_{k\to l}\,\rho_{kk}$$

$$\rho_{ll} = c_l^{*} c_l \,, \quad \psi = \sum_l c_l\, \varphi_l(r)$$

rechnen die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeit, Teilchen in $|l\rangle$ zu finden ($\dot{\rho}_{ll}$) aus.

Die Raten Γ sind ein Maß für die Aus- und Einströmung in den Zustand $|l\rangle$



$$\Gamma_{l\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\varepsilon} \delta\left(\varepsilon + \varepsilon_k - \varepsilon_l\right)\left|\tilde{V}^{\varepsilon}_{kl}(H)\right|^2$$

Energieerhaltung bei $l \to k$ unter Einfluss eines externen Felds

Matrix- elemente des Störoperators („Target“)

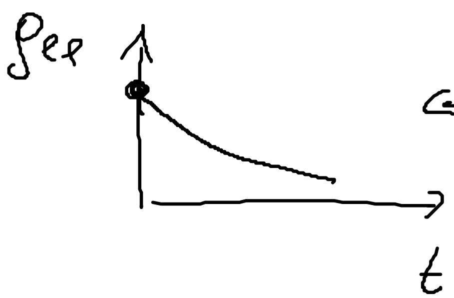
Mastergleichung stark vereinfacht für

man startet von $|l\rangle$ mit $\rho_{ll}(t_0) = 1$

→ alle anderen sind nicht besetzt $\rho_{kk} = 0 \quad (k \neq \ell)$

$$\dot{\rho}_{\ell\ell} \approx - \sum_k \Gamma_{\ell \to k} \, \rho_{\ell\ell}$$

$$\to \rho_{\ell\ell}(t) = \rho_{\ell\ell}(t_0) \, e^{-\sum_k \Gamma_{\ell \to k} t}$$



Rate $\Gamma_\ell = \sum_k \Gamma_{\ell \to k}$ beschreibt, wie schnell

das System den Zustand ℓ verläßt.

Die Rate wird in 2. Ordnung Störungstheorie hergeleitet

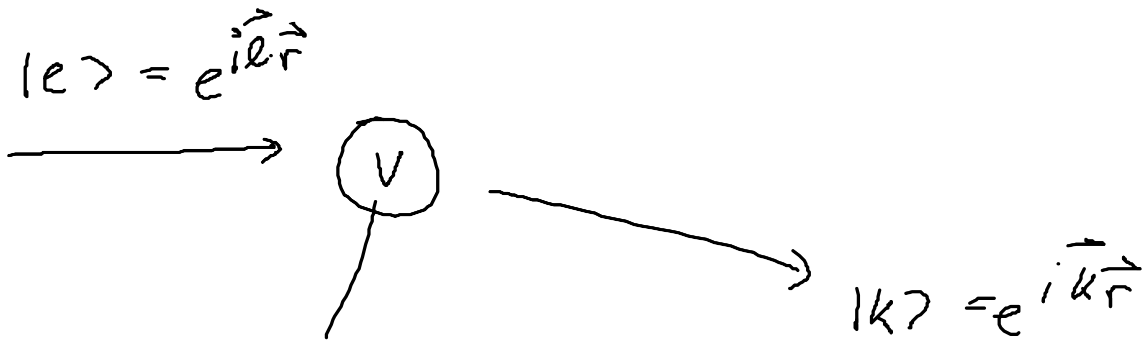
(„2. Bornsche Näherung")

Betrachte jetzt die Streuraten Γ für

7.2. Teilchen - Kern - Streuung

7.3. Elektron - Photon - Streuung

7.2. Streuung von Teilchen an festen Potentialen



Potential eines Atomkerns o.ä.

durch $\Gamma_{l\to k}$ mit dem Potential als Störung

2. Quantisierung: $V(r) \to \underline{V}(r)$

$$\underline{V} = \int d^3r \, \Psi^\dagger(r,t)\, V(r)\, \Psi(r,t),$$ Moden einsetzen!

$$= \sum_{k_1 k_2} \int d^3r \, \varphi^*_{k_1}(r)\, V(r)\, \varphi_{k_2}(r) \; a^\dagger_{k_1} a_{k_2}$$

$$= \sum_{k_1 k_2} \tilde{V}_{k_1 k_2} \, a^\dagger_{k_1} a_{k_2}$$

$$\Gamma_{l\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}\, \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_l)\, |V_{kl}|^2$$

$$\langle k | \underline{V} | e \rangle = V_{ke}$$

$$V_{ke} = \sum_{k_1 k_2} \bar{V}_{k_1 k_2} \langle k | a^+_{k_1} a_{k_2} | e \rangle$$

$$= \sum_{k_1 k_2} \bar{V}_{k_1 k_2} \underbrace{\langle 0 | a_k \, a^+_{k_1} a_{k_2} \, a^+_e | 0 \rangle}$$

versuche Normalordnung
(alle Vernichter rechts)

Fermionen!

$$\langle 0 | (\delta_{k k_1} - a^+_{k_1} a_k)(\delta_{k_2 e} - a^+_e a_{k_2}) | 0 \rangle$$

$$a | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \delta_{k k_1} \delta_{k_2 e} | 0 \rangle$$

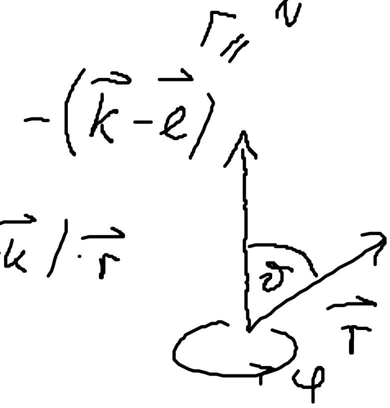
$$= \bar{V}_{ke} = \int \varphi^*_k(r) \, V(r) \, \varphi_e(r) \, d^3 r$$

explizites Berechnen von $\bar{V}_{ke}$ für ebene Wellen

$$\bar V_{kl} = \frac{1}{V}\int d^3r\, e^{-i\vec k\cdot\vec r}\, V(r)\, e^{i\vec l\cdot\vec r}$$

Normierung der ebenen Wellen

$$= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr\, r^2\, V(|\vec r|) \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta\, e^{i(\vec l-\vec k)\cdot\vec r}$$



$$(\vec l-\vec k)\cdot\vec r = |\vec l-\vec k|\, r\cos\vartheta\,, \quad |\vec l-\vec k| = \Delta k$$

$$= \frac{2\pi}{V}\int_0^\infty dr\, r^2\, V(r) \int_{-1}^{1} dx\, e^{i\Delta k\, r x} \qquad (x = \cos\vartheta)$$

$$= \frac{4\pi}{V}\int_0^\infty dr\, \frac{r\, V(r)}{\Delta k}\, \sin(\Delta k\, r)$$

$$V(r) = \alpha\,\frac{e^{-\lambda r}}{r}$$ abgeschirmtes Potential

$\lambda \to 0$ Coulomb

$$= \frac{4\pi\alpha}{V\Delta k}\int_0^\infty dr\, e^{-\lambda r}\sin(\Delta k\, r) = \frac{4\pi\alpha}{V\Delta k}\,\frac{\Delta k}{\Delta k^2+\lambda^2}$$

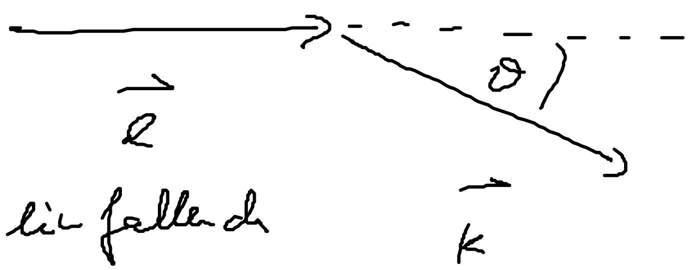
Coulomb: $\lambda \to 0$ diskutieren

Diskussion von $\Gamma_{l \to k}$

$$\Gamma_{\vec{l} \to \vec{k}} = \beta\, \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_l) \frac{1}{\Delta k^4}$$

β umfaßt alle Konstanten

$$= \beta \frac{\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_l)}{|\vec{k} - \vec{l}|^4} = \beta \frac{\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_l)}{|\vec{k}^2 + \vec{l}^2 - 2\vec{k}\cdot\vec{l}|^2}$$



einfallende

ausfallende Welle

$$= \beta \frac{\delta(\varepsilon_l - \varepsilon_k)\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{-2}}{\left(\varepsilon_k + \varepsilon_l - 2\frac{kl\hbar^2}{2m}\cos\vartheta\right)^2}$$

$$= \tilde{\beta} \frac{\delta(\varepsilon_l - \varepsilon_k)}{(2\varepsilon_k - 2\varepsilon_k \cos\vartheta)^2}$$

$$= \frac{\tilde{\beta}}{4} \frac{\delta(\varepsilon_e - \varepsilon_k)}{\varepsilon_k^2 \, \underline{(1-\cos\vartheta)^2}} = \frac{\tilde{\beta}}{4} \frac{\delta(\varepsilon_e - \varepsilon_k)}{\varepsilon_k^2 \, \underline{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}}$$

für die Energie : $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \varepsilon_k$

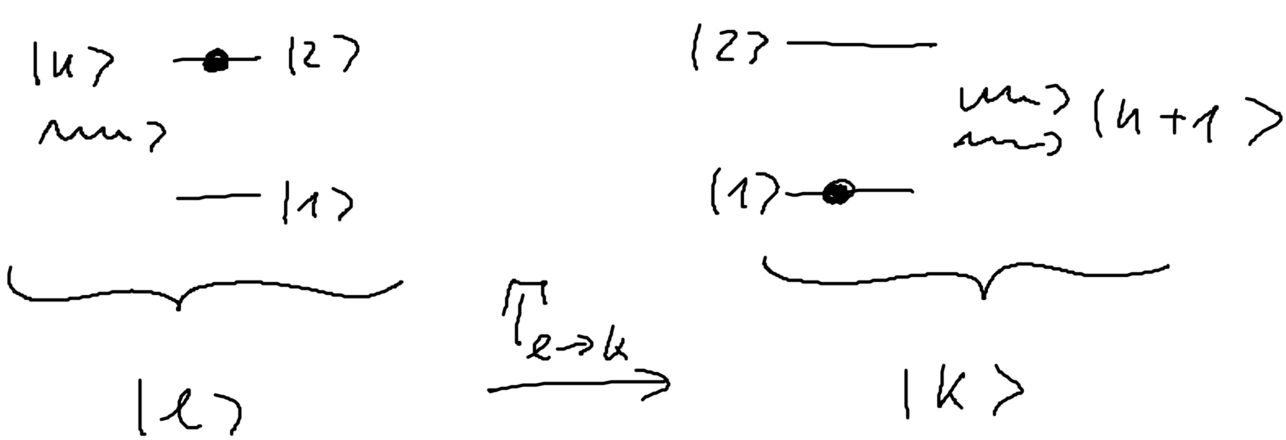
<u>Rutherford - Streuquerschnitt ,</u> $\longrightarrow$ bekannt

versagt für $\vartheta = 0$, weil Störungstheorie versagt.

<u>7.3. Elektron - Photon - Streuung</u>

<u>Ziel:</u> spontane u. induzierte Emission

betrachte folgende Anfangs- und Endzustand



angeregtes Atom
und n Photonen

Atom im Grundzustand
mit $n+1$ Photonen

wenn n Photonen vorliegen $(n \neq 0)$ dann spricht man von stimulierter Emission, f. $n = 0$ spricht man von spontaner Emission

Wechselwirkungspotential für den Übergang $|e\rangle \to |k\rangle$

$$V = -q \underset{\text{Elektron}}{\vec{r}} \cdot \underset{\text{Feld}}{\vec{E}} \xRightarrow{\text{nach Moden}} \underline{V} = -\sum_{i,j=1,2} \vec{d}_{ij}\, a_i^{+} a_j \underbrace{\sum_{\lambda k} g_k \vec{e}_{\lambda k} (c_{\lambda k} - c_{\lambda k}^{+})}_{\vec{E}}$$

$$\vec{d}_{ij} = \int d^3r\, \varphi_i^{*}(r)\, \vec{r} q\, \varphi_j(r) \neq 0$$

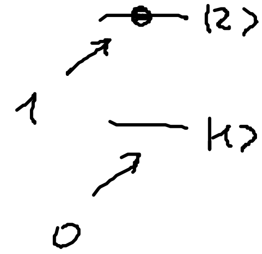
$$g_k = \left(\frac{\hbar \omega_k}{2 \varepsilon_0 V} \right)^{1/2}$$

$$\Gamma_{e \to k} = \frac{2\pi}{\hbar}\, \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_e)\, |V_{ek}|^2$$

Niveau

$$|\ell\rangle = a_2^+ |0\rangle_{El}\, |n\rangle_{Ph} = \left|\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & k & \\ 0, & 0 & & n_{k\lambda} & \cdots\end{matrix}\right\rangle$$

El-Zahl



1 Mode besetzt

$$|\underline{k}\rangle = a_1^+ |0\rangle_{El}\, |n+1\rangle_{ph} = \left|\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix}1\,2\,3 & k\\ & n_{k\lambda}+1\end{matrix}\right\rangle$$

$$\underline{V}\, |k\rangle \sim a_i^+ a_j \left|\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{matrix}\right\rangle \left(c^+_{\lambda k} - c_{\lambda k}\right) \left|\cdots\ n_{\lambda k}+1\right\rangle$$

$$\underbrace{a_i^+ \delta_{j1} \left|\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{matrix}\right\rangle}_{\delta_{i2}\delta_{j1} \left|\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\rangle} \left((n+2)^{1/2} |n_{\lambda k}+2\rangle - (n+1)^{1/2} |n_{\lambda k}\rangle \right)$$

$$\underline{\langle \ell | \underline{V} | k\rangle} \sim \underline{\left\langle\begin{matrix}1\,2\\ 0\,1\end{matrix}\right| \langle n_{\lambda k}|}\, n_\lambda |k\rangle \sqrt{n+1} \left|\begin{matrix}1\,2\\ 0\,1\end{matrix}\right\rangle$$

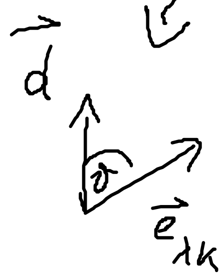
$$= -\sqrt{n+1}$$

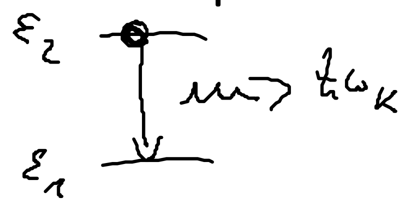
Insgesamt lautet die Rate:

$$\Gamma_{e\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}\,\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_e)\,|V_{ke}|^2$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar}(n_{\lambda k}+1)\,\delta\Big(\underset{\uparrow \text{ Elektron}}{\varepsilon_1} + \underset{\uparrow \text{ Photonfeld}}{\hbar\omega_{\lambda k}(n_{\lambda k}+1)} - \varepsilon_2 - \hbar\omega_{\lambda k} n_{\lambda k}\Big)\,\big|\vec d_{12}\,\vec e_{\lambda k}\, g_k\big|^2$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar}\,\underbrace{\frac{\hbar\omega_{\lambda k}}{2\varepsilon_0 V}}_{\text{von } g_k}\,(n_{\lambda k}+1)\,\underbrace{\big|\vec d_{12}\,\vec e_{\lambda k}\big|^2}\,\underbrace{\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \hbar\omega_k)}_{\text{Energieerhaltung}}$$





Winkelmittelg. über ϑ sammelt eigentlich alle Beiträge

$d_{12}^2 \cdot \frac{1}{3}$

$\sum_k \Gamma_{e\to k} = \Gamma_e$ war die Rate die in Mastergleichung eingesetzt $\dot{\rho}_{ee} = -\Gamma_e \rho_{ee}$

$\sum_k \hat{=}$ alle Photonmoden mitnehmen

bisher nur für 1 feste $n_{\lambda k}$

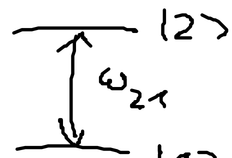
$$\sum_{k,\lambda} \cdot = 2 \int d^3k \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot = 2 \int \frac{d\omega^3}{c^3} \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot$$

$$\Gamma_e = \sum_{k\lambda} \Gamma_{e \to k} = \frac{d_{12}^2\, \omega_{21}^3}{3\hbar \varepsilon_0 \pi} \left(n(\omega_{21}) + 1 \right)$$

Die Rate mit der ein elektronisch angeregter Zustand zerfällt ist proportional zum

d_{12}^2 Dipolmoment quadrat

$$\omega_{21}^3 = \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\hbar} \right)^3$$



$\hat{=}$ Niveauabstand

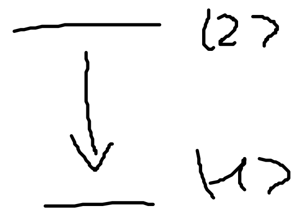
$$\left(n(\omega_{21}) + 1 \right)$$

stimulierte Emission

= Zahl Photon mit atoma übergangs frequenz

spontan Emission, d.h. es müssen kein Photon vorliegen damit Teilch $|2\rangle \to |1\rangle$

$$\rho_{22} = e^{-\Gamma_e t} \rho_{22}(0)$$



Zeitdauer der spontan Rekombination

$$\left(\begin{matrix} \mu s & \to & ns \\ 10^{-6} & & 10^{-9}\, s \end{matrix} \right)$$