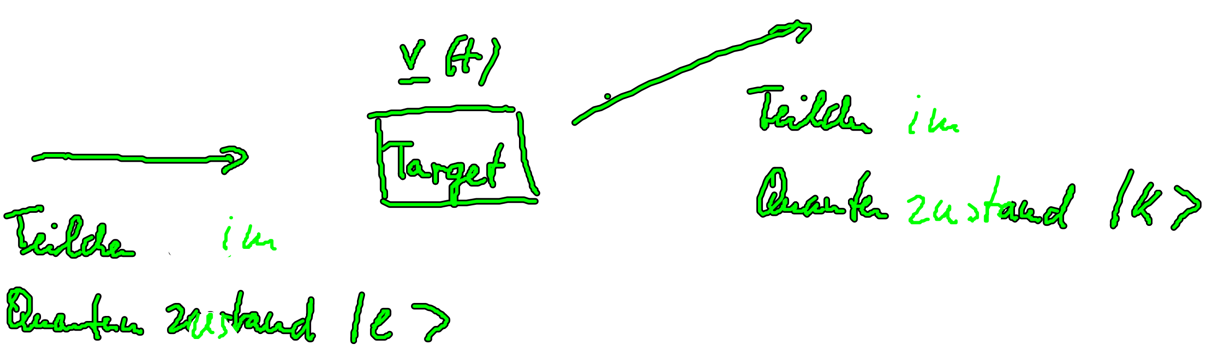
7. Streutheorie

7.1. Zugang über Mastergleichung

in Lehrbüchern sehr oft über Wellenfunktion $\Psi(\vec{r},t)$,
hier etwas allgemeinere Formulierung

Streutheorie beschäftigt sich mit Wechselwirkung von Teilchen (Elektronen, Neutronen ...) mit anderen Teilchen oder Potentialen $\underline{V}(t)$

Für gebundene Zustände müssen nicht störungstheoretische Zugänge verwendet werden



Mastergleichungen für Wahrscheinlichkeit für die Besetzung eines Zustands l : (Kapitel 3.2.4)

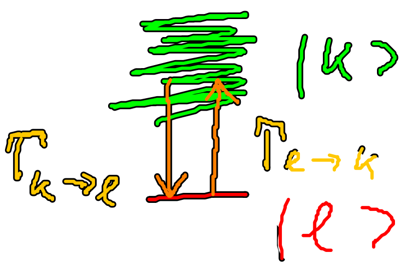
$$\dot{\rho}_{ee} = -\sum_k \Gamma_{e\to k}\,\rho_{ee} + \sum_k \Gamma_{k\to e}\,\rho_{kk}$$

$$\uparrow$$

$$\rho_{ee} = c_e^* c_e\,, \quad \psi = \sum_e c_e\, \varphi_e(r)$$

rechnen die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeit, Teilchen in $|e\rangle$ zu finden ($\dot{\rho}_{ee}$) aus.

Die Rate Γ sind ein Maß für die Aus- und Einströmung in den Zustand $|e\rangle$



$$\Gamma_{e\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\varepsilon} \delta(\varepsilon + \varepsilon_k - \varepsilon_e)\left|\tilde{V}^{e}_{ke}(A)\right|^2$$

Energieerhaltung bei $e \to k$ unter Einfluss eines externen Felds

Matrix-element des Störoperators („Target")

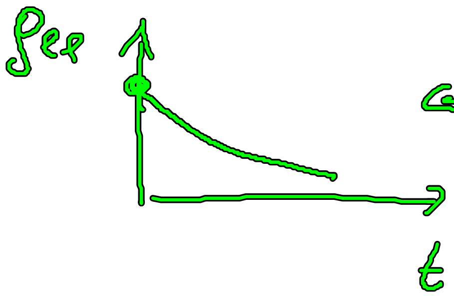
Mastergleichung stark vereinfacht für

man startet von $|e\rangle$ mit $\rho_{ee}(t_0) = 1$

→ alle anderen sind nicht besetzt $\rho_{kk} = 0$ $(k \neq l)$

$$\dot{\rho}_{ll} \approx - \sum_k \Gamma_{l \to k} \rho_{ll}$$

$$\to \quad \rho_{ll}(t) = \rho_{ll}(t_0)\, e^{-\sum_k \Gamma_{l\to k}\, t}$$



Rate $\Gamma_l = \sum_k \Gamma_{l \to k}$ beschreibt, wie schnell das System den Zustand l verläßt.

Die Rate wird in 2. Ordnung Störungstheorie hergeleitet („2. Bornsche Näherung")

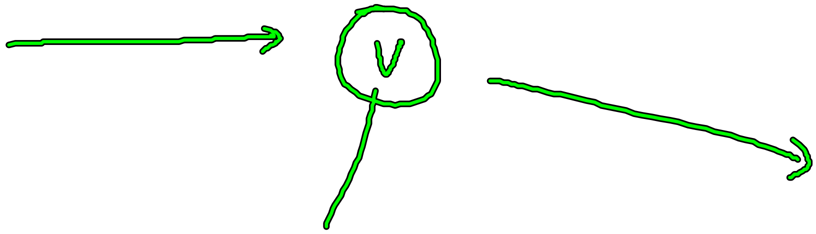
Betrachte jetzt die <u>Streuraten</u> Γ für

7.2. Teilchen - Kern - Streuung

7.3. Elektron - Photon - Streuung

7.2, Streuung von Teilchen an festen Potentialen

$|l\rangle = e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}}$



$|k\rangle = e^{i\vec{k}\vec{r}}$

Potential eines Atomkerns o.ä.

durch $\Gamma_{l\to k}$ mit dem Potential als Störung

2. Quantisierung: $V(r) \to \underline{V}(r)$

$$\underline{V} = \int d^3r\, \psi^\dagger(r,t)\, V(r)\, \psi(r,t),$$ Moden einsetzen!

$$= \sum_{k_1k_2} \underbrace{\int d^3r\, \varphi^*_{k_1}(r)\, V(r)\, \varphi_{k_2}(r)}_{V_{k_1k_2}}\, a^\dagger_{k_1} a_{k_2}$$

$$= \sum_{k_1k_2} V_{k_1k_2}\, a^\dagger_{k_1} a_{k_2}$$

$$\Gamma_{l\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}\, \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_l)\, |V_{kl}|^2$$

$$\langle k | \underline{V} | \ell \rangle = V_{k\ell}$$

$$V_{k\ell} = \sum_{k_1 k_2} \bar{V}_{k_1 k_2} \underbrace{\langle k|}\, a^+_{k_1} a_{k_2} \underbrace{|\ell\rangle}$$

$$= \sum_{k_1 k_2} \bar{V}_{k_1 k_2} \underbrace{\langle 0| a_k \, a^+_{k_1} a_{k_2} \, a^+_\ell |0\rangle}_{\substack{\text{versuche Normalordnung} \\ \text{(alle Vernichter rechts)}}}$$

Fermionen!

$$\langle 0 | (\delta_{kk_1} - a^+_{k_1} a_k)(\delta_{k_2\ell} - a^+_\ell a_{k_2}) |0\rangle$$

$$a|0\rangle = 0$$

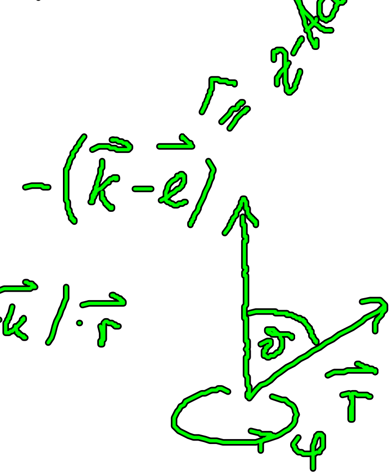
$$\langle 0 | \delta_{kk_1} \delta_{k_2\ell} |0\rangle$$

$$= \bar{V}_{k\ell} = \int \varphi_k^*(r)\, V(r)\, \varphi_\ell(r)\, d^3r$$

explizite Berechnung von $\bar{V}_{k\ell}$ für ebene Wellen

$$\bar V_{kl} = \frac{1}{V}\int d^3r\, e^{-i\vec k\cdot\vec r}\, V(r)\, e^{i\vec l\cdot\vec r}$$

Normierung der ebenen Wellen



$$= \frac{1}{V}\underline{\int_0^{2\pi} d\varphi}\int_0^\infty dr\, r^2\, V(|\vec r|)\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta\; e^{i(\vec l-\vec k)\cdot\vec r}$$

$$(\vec l-\vec k)\cdot\vec r = |\vec l-\vec k|\, r\cos\vartheta\,, \quad |\vec l-\vec k| = \Delta k$$

$$= \frac{\underline{2\pi}}{V}\int_0^\infty dr\, r^2\, V(r)\int_{-1}^{1} dx\, e^{i\Delta k\, r\, x} \qquad (x = \cos\vartheta)$$

$$= \frac{4\pi}{V}\int_0^\infty \frac{dr\, r\, V(r)}{\Delta k}\,\sin(\Delta k\, r)$$

$$V(r) = \alpha\,\frac{e^{-\lambda r}}{r}$$ abgeschirmtes Potential

$\lambda \to 0$ Coulomb

$$= \frac{4\pi\alpha}{V\Delta k}\int_0^\infty dr\, e^{-\lambda r}\sin(\Delta k\, r) = \frac{4\pi\alpha}{V\Delta k}\,\frac{\Delta k}{\Delta k^2+\lambda^2}$$

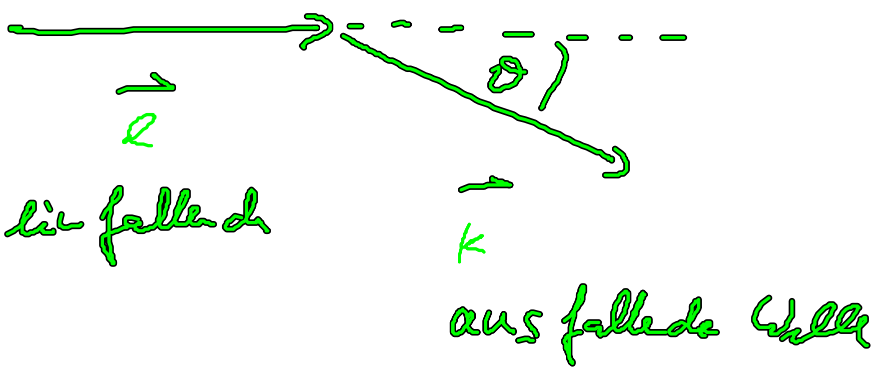
Coulomb: $\lambda \to 0$ diskutieren

Diskussion von $\Gamma_{e\to k}$

$$\Gamma_{\vec e\to\vec k} = \beta\,\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_e)\,\frac{1}{\Delta k^4}$$

β umfaßt alle Konstanten

$$= \beta\,\frac{\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_e)}{|\vec k-\vec e|^4} = \beta\,\frac{\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_e)}{|\vec k^2+\vec e^2-2\vec k\cdot\vec e|^2}$$



$$= \beta\,\frac{\delta(\varepsilon_e-\varepsilon_k)\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{-2}}{\left(\varepsilon_k+\varepsilon_e-2\frac{ke\hbar^2}{2m}\cos\vartheta\right)^2}$$

$$= \tilde\beta\,\frac{\delta(\varepsilon_e-\varepsilon_k)}{(2\varepsilon_k-2\varepsilon_k\cos\vartheta)^2}$$

$$= \frac{\tilde{\beta}}{4} \frac{\delta(\varepsilon_\ell - \varepsilon_k)}{\underline{\varepsilon_k^2 (1-\cos\vartheta)^2}} = \frac{\hat{\beta}}{4} \frac{\delta(\varepsilon_\ell - \varepsilon_k)}{\underline{\varepsilon_k^2 \sin^4\frac{\vartheta}{2}}}$$

für die Energie: $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \varepsilon_k$

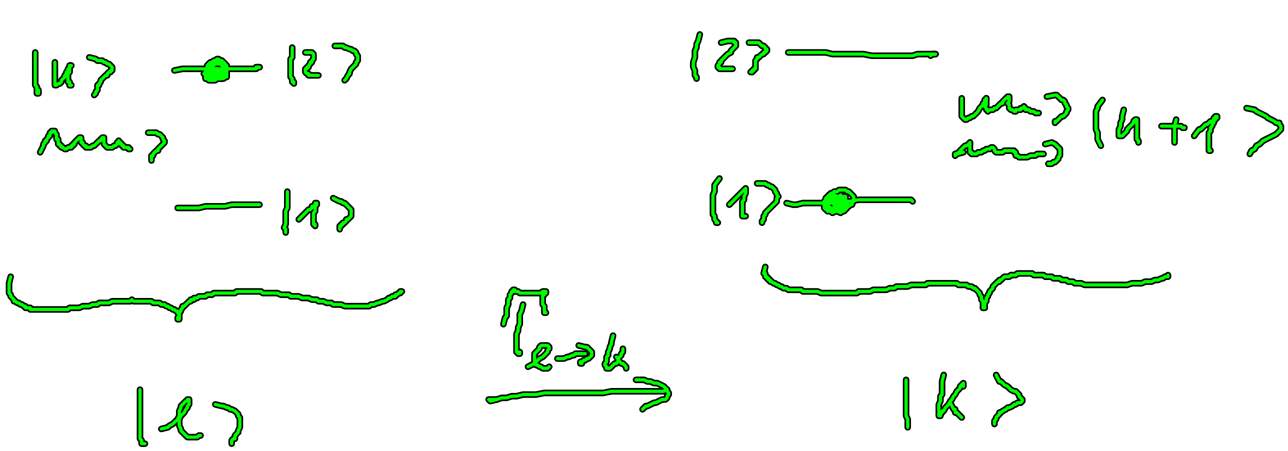
<u>Rutherford-Streuquerschnitt</u>, $\longrightarrow$ bekannt

versagt für $\vartheta = 0$, weil Störungstheorie versagt.

<u>7.3. Elektron-Photon-Streuung</u>

<u>Ziel:</u> spontane u. induzierte Emission

betrachte folgende Anfangs- und Endzustand



angeregtes Atom und n Photonen — Atom im Grundzustand mit $n+1$ Photonen

wenn n Photonen vorliegen ($n \neq 0$) dann spricht man von stimulierter Emission, f. $n=0$ spricht man von spontaner Emission

Wechselwirkungspotential für den Übergang $|e\rangle \to |k\rangle$

$$V = -q\vec{r}\cdot\vec{E} \Longrightarrow \underline{V} = -\sum_{i,j=1,2} \vec{d}_{ij}\, a_i^{+} a_j \underbrace{\sum_{\lambda k} g_k \vec{e}_{\lambda k}\,(c_{\lambda k} - c^{+}_{\lambda k})}_{\vec{E}}$$

Elektron — Feld — nach Moden

$$\vec{d}_{ij} = \int d^3r\, \varphi_i^{*}(r)\, \vec{r}\, q\, \varphi_j(r)$$

$$\neq 0$$

$$g_k = \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}$$

$$\Gamma_{e\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}\,\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_e)\,|V_{ek}|^2$$

Niveau

$$|e\rangle = a_2^+ |0\rangle_{El} \, |n\rangle_{Ph} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & k & \\ 0, & 0 & & n_{k\lambda} & \dots \end{matrix}\right\rangle$$

El-Zahl

$|2\rangle$ — 1

$|1\rangle$ — 0

1 Mode besetzt

$$|\underline{k}\rangle = a_1^+ |0\rangle_{El} \, |n+1\rangle_{ph} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix} 1\,2\,3 & k \\ & n_{k\lambda}+1 \end{matrix}\right\rangle$$

$$\underline{V} \, |k\rangle \sim a_i^+ a_j \left|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\rangle \left(c^+_{\lambda k} - c_{\lambda k} \right) \left| \dots n_{\lambda k}+1 \right\rangle$$

$$\underbrace{a_i^+ \delta_{j1} \left|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\rangle}_{\delta_{i2}\delta_{j1} \left|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\rangle} \left((n+2)^{1/2} \, |n_{\lambda k}+2\rangle - (n+1)^{1/2} \, |n_{\lambda k}\rangle \right)$$

$$\langle e | \underline{V} | k\rangle \sim \left\langle \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| \langle n_{\lambda k} | n_1 | k\rangle \sqrt{n+1} \left|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\rangle$$

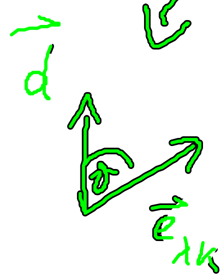
$$= -\sqrt{n+1}$$

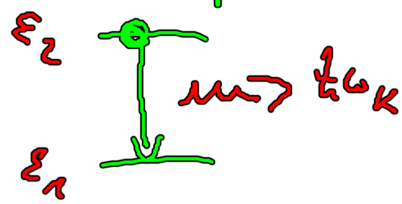
Insgesamt lautet die Rate:

$$\Gamma_{e\to k} = \frac{2\pi}{\hbar}\,\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_e)\,|V_{ke}|^2$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar}(n_{\lambda k}+1)\,\delta\Big(\underset{\uparrow\ \text{Elektron}}{\varepsilon_1} + \underset{\uparrow\ \text{Photonfeld}}{\hbar\omega_{\lambda k}(n_{\lambda k}+1)} - \varepsilon_2 - \hbar\omega_{\lambda k}n_{\lambda k}\Big)\,\big|\vec d_{12}\cdot\vec e_{\lambda k}\,g_k\big|^2$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar}\,\underbrace{\frac{\hbar\omega_{\lambda k}}{2\varepsilon_0 V}}_{\text{von } g_k}\,(n_{\lambda k}+1)\,\underbrace{\big|\vec d_{12}\cdot\vec e_{\lambda k}\big|^2}\,\underbrace{\delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\hbar\omega_k)}_{\text{Energieerhaltung}}$$





Winkelmittelg. über ϑ sammelt experimentell alle Beiträge

$$d_{12}^2\cdot\frac{1}{3}$$

$$\sum_k \Gamma_{e\to k} = \Gamma_e$$ war die Rate die

in Mastergleichung eingesetzt $\dot{\rho}_{ee} = -\Gamma_e \rho_{ee}$

$\sum_k \hat{=}$ alle Photonmoden mitnehmen

bisher nur für 1 feste $\omega_{\lambda k}$

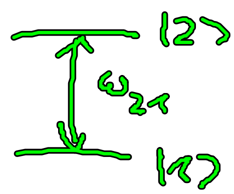
$$\sum_{k,\lambda} \cdot = 2 \int d^3k \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot = 2 \int \frac{d^3\omega}{c^3} \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot$$

$$\Gamma_e = \sum_{k\lambda} \Gamma_{e \to k} = \frac{d_{12}^2 \, \omega_{21}^3}{3\hbar \varepsilon_0 \pi} \left(n(\omega_{21}) + 1 \right)$$

Die Rate mit der ein elektronisch angeregter Zustand zerfällt ist proportional zum

d_{12}^2 Dipolmomentquadrat

$$\omega_{21}^3 = \left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} \right)^3$$



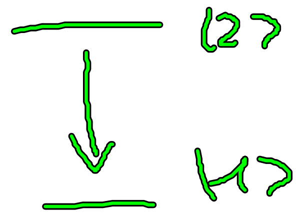
$\hat{=}$ Niveauabstand

$$\left(n(\omega_{21}) + 1\right)$$

Stimulierte Emission
= Zahl Photon mit atomar Übergangsfrequenz

spontane Emission, d.h. es müsse kein Photon vorliegen damit Teilchen $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$

$$\rho_{22} = e^{-\Gamma_e t}\,\rho_{22}(0)$$



Zeitdauer der spontanen Rekombination

$\left(\mu s \rightarrow ns\right.$

$\left.10^{-6} \quad 10^{-9}\, s\right)$