1.3 Poisson-Gleichung und Green'sche Fkt.

Allg. Lösung der Poisson-Gl. $\Delta\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$

Part. Dgl. für $\phi(r)$ zu vorgeg. Ladungsverteil $\rho(\underline{r})$
(Randbed.!)

Green'sche Funktion

Allg. Methode zur Lösung inhom. (gewöhnl. oder partieller) Dgln. für vorgegebene Inhomogenität

z.B. Mech.: gedämpfter getriebener harmon. Osz.
E-Dyn.: Poissongl.
inhomog. Wellengl.
QM: Streutheorie
Vielteilchen-QM

Abstraktes Lösungsschema:

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho} \xrightarrow[\text{Invert. des Diff.op.}]{\text{Lösung durch}} \boxed{\phi = \tilde{G}\rho}$$

Green'schen Op. $\tilde{G}$

Fourier-Trafo $\Downarrow$

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\, \hat{\phi}(\underline{k})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}')}$$

Faltungsprodukt

Fourier $\Uparrow$ -Rücktrafo

$$\boxed{-k^2\hat{\phi} = -\frac{1}{\epsilon_0}\hat{\rho}(\underline{k})} \xrightarrow[\text{des Mult. op.}]{\text{Invertierung}} \boxed{\hat{\phi} = \hat{G}\hat{\rho}} \qquad \hat{G} := \frac{1}{\epsilon_0 k^2}$$

Explizite Durchführung

(i) Lösung für Punktlad. bei $\underline{r}''$: $\rho(\underline{r}') = \delta(\underline{r}'-\underline{r}'')$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(\underline{r}'-\underline{r}'') = G(\underline{r}-\underline{r}'')$$

d.h. Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}'')$ ist Lösung der Poissongl.

$$\boxed{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}'') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}'')}$$

für δ-förmige Inhomogenität

(ii) Dann Lösung für bel. Inhomogenität $\rho(r)$ durch Faltung mit der Green'schen Fkt.

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')$$

- Green'sche Fkt. wird erst durch die Randbed. bestimmt!

Spezielle Randbed $\phi(\underline{r}) \to 0$ für $|\underline{r}| \to \infty$ (Lösung im unendl. Raum)

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\rightarrow \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Coulomb-Pot. ist Lösung der Poissongl. in $\mathbb{R}^3$ für Pkt. lad. $q=1$ bei $\underline{r}'$.

Beweis:

$$\Delta\phi(\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\rho(r')\,\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \tag{1}$$

Problem: Singularität bei $\underline{r}=\underline{r}'$!

a) $\underline{r} \neq \underline{r}'$:

$\underline{\nabla} r = \frac{\underline{r}}{r} = \underline{e}_r$

$$-\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\underline{\nabla}_r \cdot \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \underline{\nabla}_r \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

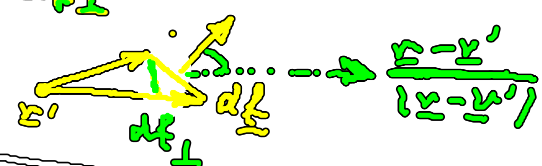
$$= \frac{\underline{\nabla}_r \cdot (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} + (\underline{r}-\underline{r}')\cdot \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

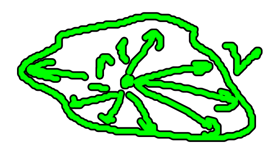
$$= \frac{3}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} - 3(\underline{r}-\underline{r}')\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\frac{1}{|r-r'|^4} = 0$$

b) $$\int_V d^3r\, \Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \int_V d^3r\, \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \overset{\text{gauß}}{=} \int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

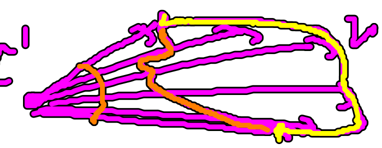
$$= -\int_{\partial V} \underbrace{d\underline{f}\cdot\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}_{df_\perp \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2}} = -\oint d\Omega = \begin{cases} -4\pi & \underline{r}'\in V \\ 0 & \underline{r}'\notin V \end{cases}$$

$$df_\perp = r^2 d\Omega$$





Erg.:
$$\boxed{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$



Dirac'sche δ-Fkt. (δ-Distribution)

$$\int_V d^3r\, \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = \begin{cases} 1 & \underline{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_V d^3r\, f(\underline{r})\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = f(\underline{r}_0) \quad \text{falls } \underline{r}_0 \quad /$$

Also
$$\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\rho(\underline{r}')\,\Delta_r\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= \frac{-4\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\rho(\underline{r}')\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$$

Poisson-Gl. erfüllt!

$\square$

∘ $$\Delta G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

d.h. Green'sche Fkt. löst Poissongl. für Pkt.ladung $q=1$ bei $\underline{r}'$.

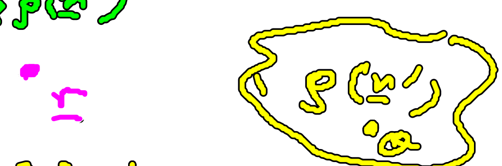
Für spez. Randbed. $\phi \xrightarrow{r\to\infty} 0$ ist

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Für bel. Ladungsverteilungen und bel. Randbed. ist $\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}')$ mit geeigneten G (z.B. Bildladungsmethode)

1.4 Elektrische Multipol-Entwicklung

Betrachte lokalisiertes $\rho(\underline{r}')$ in der Umgebung von $\underline{r}'=0$



Frage: asymptot. Verhalten von

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

für $r \to \infty$

Methode: Entwicklung des Integranden in eine Taylorreihe für $r \gg r'$:

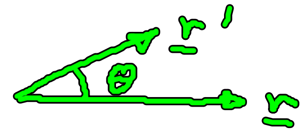
$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!}(\underline{r}'\cdot\underline{\nabla}_r)^l\, G(\underline{r})$$

$$\phi(\underline{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!}\int d^3r'\, (\underline{r}'\cdot\underline{\nabla}_r)^l\, G(\underline{r})\,\rho(\underline{r}')$$

explizit mit $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ Entwickl. durchgefü

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = (r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} = \frac{1}{r}(1 \ldots$$

Durch die für $r'<r$, $|\zeta|<1$ konvergente Reihe



$$\underbrace{\left[1 - 2\frac{r'}{r}\zeta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{-1/2}}_{\text{Erzeugende}} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\zeta)$$

sind die Legendre-Polynome $P_l(\zeta)$ def.
(Kugelfkt

$$P_l(\zeta) = \frac{1}{l!}\left[\frac{\partial^l}{\partial t^l}\left(1-2t\zeta+t^2\right)^{-1/2}\right]_{t=0}$$

$$P_0(\zeta) = 1$$

$$P_1(\zeta) = \zeta \equiv \cos\theta$$

$$P_2(\zeta) = \frac{1}{2}(3\zeta^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty} Q_l\, r^{-l-1}$$

mit $Q_l = \int d^3r'\, r'^l \rho(\mathbf{r}') P_l(\cos\theta)$ 2^l-Pol

Entw. nach Potenzen von r!