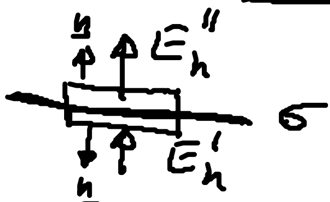
Flächenladungsdichte $\sigma(\underline{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Flächen}}$

(*) $\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(r) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r})$

$$\epsilon_0\, \underline{n}\cdot\underline{E}\, \cancel{df} = \underbrace{\rho(r)\, \Delta s}_{\sigma(\underline{r})} \cancel{df}$$

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\underline{r})\,\underline{n}}$$ auf Leiteroberfläche



$$\underbrace{E_n'' - E_n'}_{\text{„Flächendivergenz"}} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\underline{r})$$

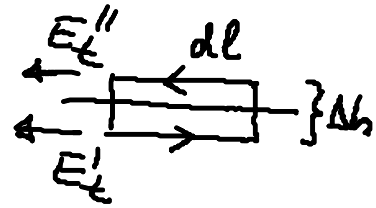
„Flächendivergenz" = Sprung der Norm. komp. von $\underline{E}$

Volumendivergenz $\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$

Tangentialkomp. von $\underline{E}$ ist stetig beim Durchgang durch geladene Fläche

Beweis

$$\oint_{\partial F} \underline{E}\, d\underline{s} = \int_F \underline{\nabla}\times\underline{E}\, df = 0$$



$F = dl \cdot \Delta h$, mit $dl \to 0$, $\Delta h \to 0$:

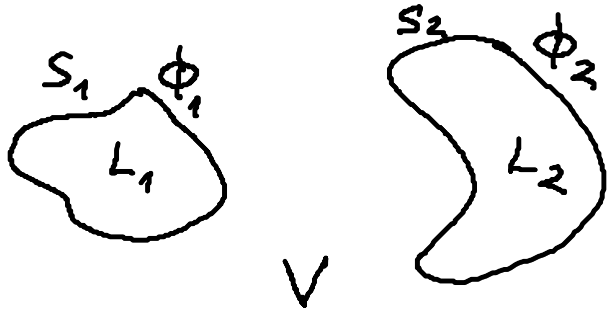
$$(E_t'' - E_t')\, dl = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E_t'' - E_t' &= 0, \\ E_n'' - E_n' &= \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\underline{r}) \end{aligned}}$$

Randwertaufgaben der El.statik mit Leitern

1. Grundaufgabe:

geg.: Leiter L_α (Oberflächen S_α), $\alpha = 1, \dots, n$
mit Pot. ϕ_α;
Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$ im Außenraum V



gesucht: $\phi(\underline{r})$ als Lösung von $\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$
zu den Randbed. $\phi(\underline{r})\big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$

$$\phi(\underline{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

sowie Gesamtladungen Q_α auf den Leitern

(Dirichlet'sches Randwertproblem)

Lösung

$$(*)\quad \boxed{\phi(\underline{r}) = \underbrace{\int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}')}_{\text{Lös. der inhom. Poissongl. zu homog. Randbed.}} + \underbrace{\epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{\text{Lös. der hom. Poissongl. } \Delta\phi = 0 \text{ zu inhom. Randbed.}}}$$

wobei die Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}')$ die Lösung von $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$ zu den Randbed.

$$G(\underline{r}-\underline{r}')\big| = 0 \qquad G(\underline{r}-\underline{r}') \longrightarrow 0$$

$r \to \infty$

$\Big|_{\substack{\underline{r} \in S_\alpha \\ \underline{r}' \in V}}$

Beweis

Aus dem gauß'schen Satz

$$\int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{v} = \int_V d^3r \, \mathrm{div}\, \underline{v}$$

folgt mit $\underline{v} = \psi \underline{\nabla} \varphi$

$$\int_{\partial V} d\underline{f} \, \psi \underline{\nabla} \varphi = \int_V d^3r \, (\psi \Delta \varphi + \underline{\nabla} \psi \cdot \underline{\nabla} \varphi)$$

bzw. $\underline{v} = \varphi \underline{\nabla} \psi$

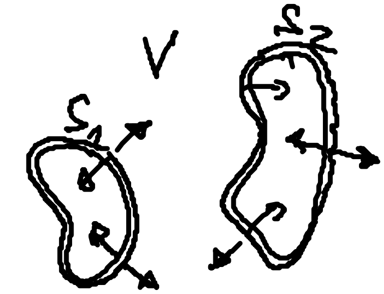
$$\int_{\partial V} d\underline{f} \, \varphi \underline{\nabla} \psi = \int_V d^3r \, (\varphi \Delta \psi + \underline{\nabla} \psi \, \underline{\nabla} \varphi)$$

$\Longrightarrow$ green'sche Satz:

$$\int_{\partial V} d\underline{f} \, (\varphi \underline{\nabla} \psi - \psi \underline{\nabla} \varphi) = \int_V d^3r \, (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi)$$

Setze $\psi(\underline{r}) := G(\underline{r} - \underline{r}')$

$\varphi(\underline{r}) := \phi(\underline{r})$, $\partial V = \bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$



(i) Löse Poissongl. ohne Randbed.

$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \varrho \quad \Longrightarrow \quad \phi(\underline{r}) = (*)$

$$\int_{\partial V} d\underline{f} \, \phi(\underline{r}) \underline{\nabla}_r G(\underline{r} - \underline{r}') - \underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f} \, G(\underline{r} - \underline{r}') \underline{\nabla} \phi}_{0} \quad \text{wegen } G\Big|_{\underline{r} \in S_\alpha} = 0$$

$d\underline{f} \to -d\underline{f}$

$\bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0} \Big[\underbrace{\int_V d^3r \, \phi(\underline{r}) \, \delta(\underline{r} - \underline{r}')}_{\phi(\underline{r}')} - \int d^3r \, G(\underline{r} - \underline{r}') \varrho(\underline{r}) \Big]$$

n

$$\longrightarrow \phi(\underline{r}') = \underbrace{\int_V d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r})} + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1} \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot \underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')$$

(ii) Randbed. auf S_α erfüllt:

$$\phi(\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta} = \int_V d^3r\, \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}}_{0} \rho(\underline{r}) + \epsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot \underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}$$

$$= -\epsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}\, \phi(\underline{r})\, \underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}$$

green'scher Satz

$$= -\epsilon_0 \Big[\int_{\partial V} d\underline{f}\, \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}}_{0} \underline{\nabla}_r \phi$$

$$+ \underbrace{\int_V d^3r \Big(\phi \underbrace{\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\phi(\underline{r}')\big|_{\underline{r}'\in S_\beta}} - \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in S_\beta}}_{0} \Delta\phi \Big) \Big]$$

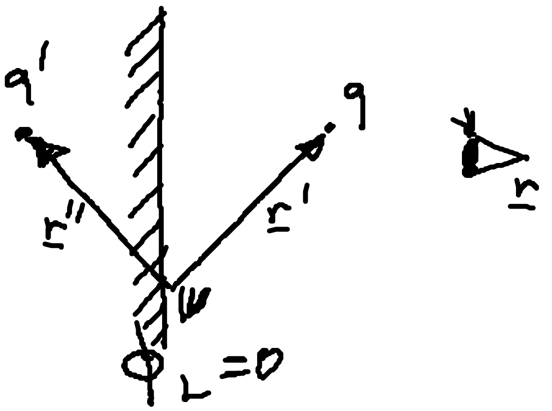
$$= \phi_\beta \qquad \square$$

Ladung: $$Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} df\, \sigma = \epsilon_0 \oint \underbrace{df\, \underline{n}}_{d\underline{f}} \cdot \underline{E}$$

$$= -\epsilon_0 \oint d\underline{f}\cdot \underline{\nabla}\phi$$

Konstruktion der Green'schen Funktion

Für Leiteroberflächen mit hoher Symmetrie:
Methode der Bildladungen (Spiegelladungen)

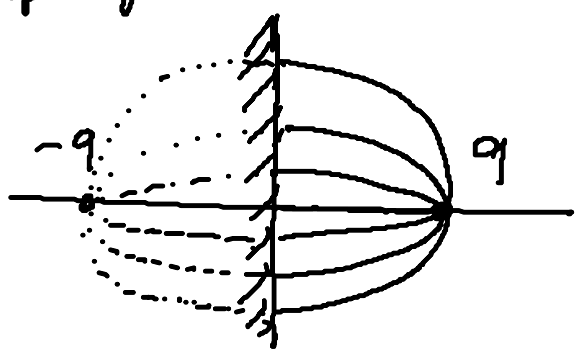


Wähle fiktive Bildladung q' bei $\underline{r}''$ im Leiter, so dass Potential beider Ladungen auf der Leiteroberfläche verschwinden

$q' = -q$

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}''|}\right)$$

Dipolpot.



fiktive reale Feldlinien