2.3. Magnetostat. Feldgleichungen

$\underline{F} = q\underline{v} \times \underline{B}(\underline{r})$ Lorentzkraft

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$ Ampère-Gesetz

Mit dem Vektorpotential

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3_r{}' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

läßt sich

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot } \underline{A}}$$

schreiben.

<u>Beweis</u>: $\underline{\nabla} \times \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3_r{}' \left(\underbrace{\underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} \right) \times \underline{j}(\underline{r}')$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3_r{}' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \overset{!}{=} \underline{B}$$

Folgendes ist äquivalent:

(i) $\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot } \underline{A}$ (Vektorpot.)

$\Updownarrow$

(ii) $\boxed{\text{div } \underline{B} = 0}$ $\qquad \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{A}) \equiv 0$

Es gibt keine Quellen der magn. Induktion.
(„magn. Ladungen" = „Monopol")

$\Updownarrow$

(iii) $\oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0$

<u>Zusammenhang zwischen $\underline{B}$ und $\underline{j}$</u>: auch nichtstationär

$$\text{rot } \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A}$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\underline{b})$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \underline{\nabla}_r\cdot\left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\cdot\underbrace{\underline{\nabla}_r\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\underline{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\left[\underbrace{-\underline{\nabla}_{r'}\cdot\left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)}_{\text{gauß}} + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\underbrace{\underline{\nabla}_{r'}\cdot\underline{j}(\underline{r}')}_{-\frac{\partial}{\partial t}\varrho\ \frac{\text{Kont.}}{\text{gl.}}}\right]$$

$$= \underbrace{-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S(r\to\infty)} d\underline{f}'\, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{0} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \frac{\varrho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\mu_0\epsilon_0\,\phi(\underline{r},t)}$$

$$\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) = \underline{\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}}$$

$$\Delta\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\underbrace{\Delta_r\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')} = -\mu_0\,\underline{j}(\underline{r},t)$$

Also $\boxed{\text{rot}\,\underline{B} = \mu_0\underline{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}}$

Verschiebungsstromdichte

= nichtstationär

Für stationäre Strom- und Ladungsverteil.:

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j}}$$ differentielle Form des Ampère-Gesetzes

Integration über Fläche F:

$$\int_F d\underline{f}\,\mathrm{rot}\,\underline{B} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{B} = \mu_0 \underbrace{\int_F d\underline{f}\cdot\underline{j}(\underline{r})}_{I \text{ Strom}}$$

$$\boxed{\oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 I}$$ Integralform (Durchflutungsgesetz)

Zus.fassung

Magnetostatik		Elektrostatik	
$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$ $\Updownarrow$ $\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$	quellenfrei	$\mathrm{rot}\,\underline{E} = 0$ $\Updownarrow$ $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi$	wirbelfrei
$\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j}$ $\Updownarrow$ $\oint d\underline{s}\cdot\underline{B} = \mu_0 I$	Ampère	$\epsilon_0\,\mathrm{div}\,\underline{E} = \rho$ $\Updownarrow$ $\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E} = Q$	diff. integral gauß

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$$\boxed{\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}} \qquad \boxed{\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})}$$

gilt nur, falls $\boxed{\operatorname{div} A = 0}$ Poisson-Gl.

Coulomb-Eichung

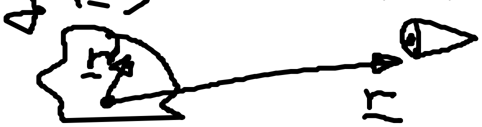
2.4 Magnetische Multipole (stationär)

Ausgangspunkt $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

$\operatorname{div} \underline{A} = 0$ Coulomb-Eichung

$\underline{A}(\underline{r}) \to 0$ für $r \to \infty$

Taylorentw. von $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ für räuml. lokalisierte stationäre Stromvert. $\underline{j}(\underline{r}')$ mit $r' \ll r$



$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}') + \dots$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}')}_{\text{Monopol } = 0} + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, (\underline{r}\cdot\underline{r}')\, \underline{j}(\underline{r}') + \dots$$

$$\underline{\nabla}_{r'} \cdot \left[x'_k \underline{j}(\underline{r}')\right] = x'_k \underbrace{(\underline{\nabla}\cdot\underline{j})}_{0 \text{ stationär (Kont.gl.)}} + \underline{j}\cdot(\underline{\nabla}\, x'_k) = j_k$$

$$\int d^3r' \, j_k(\underline{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \nabla[x'_k \underline{j}] \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{S_\infty} d\underline{f} \cdot x'_k \underline{j} = 0$$

Dipol-Term

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\, \underline{m} \times \underline{r}$$

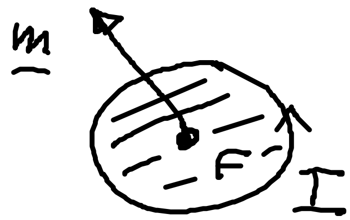
$\underline{m} := \frac{1}{2}\int d^3r'\, \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')$

magn. Dipolmoment

$$\left(\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\, \underline{p}\cdot\underline{r} \qquad \underline{p} := \int d^3r'\, \underline{r}'\rho(\underline{r}') \right)$$

el. Dipolmoment

Beispiel (i) ebene Leiterschleife



Ringstrom $\longrightarrow$ magn. Dipolmoment $\underline{m}$

$$\underline{m} = I F \underline{n}$$