3. Die Maxwell-Gleichunge

3.1 TCP-Invarianz

siehe Skript

3.2 Maxwell-Gleichungen im Vakuum

neue Feldgrößen:

$\underline{D}(\underline{r},t) := \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r},t)$ dielektrische Verschiebung

$\underline{H}(\underline{r},t) := \frac{1}{\mu_0} \underline{B}(\underline{r},t)$ Magnetfeld

$$\left.\boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} &= 0 \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{B} &= 0 \end{aligned}}\right\}$$ homogene Maxwell-Gl.
WW von geg. Feldern

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{D} &= \rho \\ \underline{\nabla} \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} &= \underline{j} \end{aligned}}$$

inhomogene Maxwell-Gl.
Erzeugung der Felder
$\underline{D}, \underline{H}$ durch Ladungen & Ströme

Im Gauß-System:

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 4\pi\rho$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{E} = \frac{4\pi}{c}\underline{j}$$

NB: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

Potenziale:

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$$

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \quad \text{(Gauß)}$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \quad \text{(MKS \& Gauß)}$$

3.3 Induktionsgesetz

Die Maxwell-Gleichung $\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0$ wird über Fläche F integriert. (F ist ortsfest)

$$\underbrace{\int_F \underline{\nabla} \times \underline{E}\, d\underline{f}} = -\int_F \frac{\partial}{\partial t}\underline{B}\, d\underline{f}$$

$$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_F \underline{B}\, d\underline{f}$$

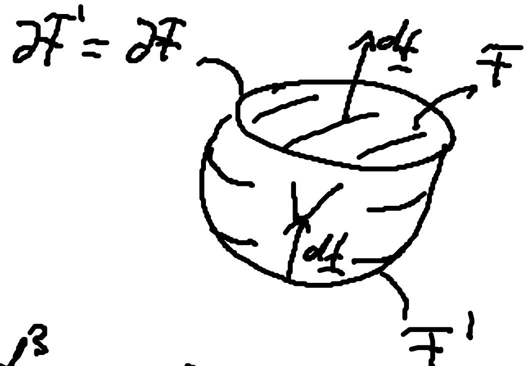
$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi}$$ Integralform

mit dem magnetischen Fluss Φ.

$$\Phi = \int_F \underline{B} \cdot d\underline{f} = \int_F \underline{\nabla} \times \underline{A}\, d\underline{f} = \oint_{\partial F} \underline{A} \cdot d\underline{s}$$

$$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_{\partial F} \underline{A} \cdot d\underline{s}$$: zeitl. Änderung der Zirkulation von $\underline{A}$.

Seien F, F' 2 Flächen mit demselben Rand ($\partial F = \partial F'$), die das Volumen V einschließen.



$$\int_F \underline{B} \cdot d\underline{f} - \int_{F'} \underline{B} \cdot d\underline{f} = \oint_{\partial V} \underline{B}\, d\underline{f}$$

$$= \int_V \underbrace{\operatorname{div} \underline{B}}_{=0}\, d^3r = 0$$

$\longrightarrow$ Nichtexistenz magn. Monopole.

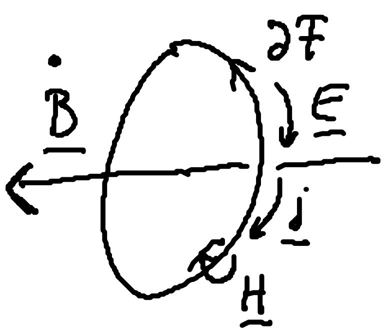
$$-\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} =: \Delta \phi$$ Potenzialdifferenz bei Umlauf von ∂F.

$\hat{=}$ induzierte Spannung
(Wirbelfeld)

$\Rightarrow \boxed{\Delta\phi = \frac{\partial}{\partial t}\underline{\Phi}}$ Faraday'sches Induktionsgesetz

Anwendung: i) Dynamo, Generator
ii) Transformator

<u>Lenz'schen Regel</u>



$\dot{\underline{B}} \Rightarrow \underline{E}$ induziert $(\mathrm{rot}\,\underline{E} = \ominus\dot{\underline{B}})$

$\underline{E} \Rightarrow$ Ladungsbewegung $\underline{j}$

$\underline{j} \Rightarrow \underline{H}$ $\quad (\oplus\,\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j})$

$\underline{H}$ ist $\dot{\underline{B}}$ entgegengerichtet.

Zusammenfassung:

Maxwell-Gleichungen in Integralform:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\oint_{\partial F} \underline{E}\cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{\Phi} \\
&\oint_{\partial V} \underline{B}\cdot d\underline{f} = 0 \\
&\oint_{\partial V} \underline{E}\cdot d\underline{f} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \\
&\oint_{\partial F} \underline{H}\cdot d\underline{s} = \int_F \dot{\underline{D}}\cdot d\underline{f} + \underline{I}
\end{aligned}}$$

Zeitl. Änderung des magn. Flusses $\underline{\Phi} = \int_F d\underline{f}\cdot\underline{B} \longleftrightarrow$ Zirkulation des elektr. Feldes entlang geschl. ∂F

Fluss der magn. Induktion durch geschlossene Fläche $\partial V = 0$

Fluss des elektr. Feldes durch geschlossene Fläche ∂V = eingeschlossene Ladung $\frac{Q}{\epsilon_0}$

Zirkulation des Magnetfeldes entlang geschl. ∂F = (Konvektions-)Strom $I = \int_F d\underline{f}\cdot\underline{j}$ + die elektrische Verschiebungsstrom $\int_F d\underline{f}\cdot\dot{D}$

3.4 Energiebilanz

Die Maxwell-Gleichungen enthalten die Kontinuitätsgleichung (für elektrische Ladungen): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\underline{j} = 0$.

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\underline{j} \underset{\underline{\nabla}\cdot\underline{D}=\rho}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\underline{\nabla}\cdot\underline{D}) + \underline{\nabla}\cdot\underline{j} \underset{\frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}}{=} \underline{\nabla}\cdot(\dot{\underline{D}} + \underline{j}) \underset{\underline{\nabla}\times\underline{H} = \dot{\underline{D}}+\underline{j}}{=} \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{H}) = 0\right)$$

Frage: Enthalten die Maxwell-Gleichungen weitere Erhaltungssätze für „extensive" physikalische Observable z.B.: (Ladung,) Energie, Impuls, Drehimpuls?

(extensiv: additiv bei Systemzusammensetzung

intensiv: Temperatur, Druck, Energie-, Impuls-, Drehimpulsdichten)

Energietransport durch das elektromagnetische Feld:

i) $\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0$

ii) $\underline{\nabla} \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = \underline{j}$

$$\xrightarrow{\text{i)} - \text{ii)}} \quad \nabla \times E + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} - \underline{\nabla} \times \underline{H} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = -j$$

$$\xrightarrow{\text{i)}\cdot H - \text{ii)}\cdot E} \quad \underbrace{\underline{H} \cdot (\underline{\nabla} \times E) - \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{H})}_{\underline{\nabla} \cdot (\underline{E} \times \underline{H})} + \underbrace{\underline{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}}_{\underbrace{\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2\right)}} + \underbrace{\underline{E} \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}}_{\underbrace{\epsilon_0 \underline{E} \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 \underline{E}^2\right)}} = -\underline{j} \cdot \underline{E}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{S} + \frac{\partial}{\partial t} w = -\underline{j} \cdot \underline{E}}$$ Kontinuitätsgleichung (für Energie)

$$w := \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2 = \frac{1}{2}\left(\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}\right)$$ Energiedichte

des elektromagn. Feldes

$\underline{S} := \underline{E} \times \underline{H}$ Energiestromdichte d. e-m Feldes

„Poynting-Vektor"

$\sigma := -\dot{\underline{j}}\underline{E}$ Quelldichte d. e-m. Feldes

(Leistungsdichte)

$$\sigma \begin{cases} < 0 : \dot{\underline{j}} \cdot \underline{E} > 0 & \text{Abnahme} \\ > 0 : \dot{\underline{j}} \cdot \underline{E} < 0 & \text{Zunahme} \end{cases} \Bigg\} \text{ der Feldenergie.}$$