Energiebilanz

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} w + \underline{\nabla} \cdot \underline{S} = - \underline{j} \cdot \underline{E}}$$ Kontinuitätsgl.

$w = \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H})$ Energiedichte

$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$ Energiestromdichte

= Poynting-Vektor

$-\underline{j} \cdot \underline{E}$ Leistungsdichte

Beispiel: Beschleunigung von Teilchen durch Felder $\underline{E}$, $\underline{B}$:

Kraft auf Ladung q: $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Kraftdichte: $\underline{f} = \rho \, (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Leistungsdichte der Felder auf die Ladungen ρ:

$$\underline{f}\cdot\underline{v} = \underbrace{\rho\,\underline{v}}_{\underline{j}}\cdot\underline{E} + \rho\,\underbrace{\underline{v}\,(\underline{v}\times\underline{B})}_{0} = \underline{j}\,\underline{E}$$

Magnetfeld leistet keine Arbeit, da $\underline{F} \perp \underline{v}$

(Verlustleistung der Feldenergie)

Die Feldenergie ist also keine Erhaltungsgröße!

1. Beispiel: Ohm'sches Gesetz

$\underline{j} = \sigma\,\underline{E}$ mit konstante Leitfähigk.

$\sigma > 0$

gilt in Metallen u. Halbleitern für kleine $\underline{E}$

$\Longrightarrow$ Energiebilanz $\frac{\partial}{\partial t} w + \underline{\nabla}\cdot\underline{S} = \underbrace{-\sigma\,\underline{E}^2}_{\text{Verlust}} < 0$

(Konsequenz des 2. Hauptsatzes der Thermodyn.)

Ohm'sches Gesetz nicht zeitumkehrinvariant

$t \to -t$

$\underline{j} \to -\underline{j}$

$\underline{E} \to \underline{E}$

2. Beispiel: Antennenabstrahlung

$\underline{j}$ $\uparrow\downarrow$ Wechselfeld $\underline{E}$

$\underline{j}\cdot\underline{E} < 0 \Longrightarrow$ Energiegewinn des Feldes

3.5 Impulsbilanz

Maxwellgln. $\longrightarrow$ weitere Bilanzgl. für Impulstransport durch das el.-magn. Feld:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underline{D}\times\underline{B}) = \underbrace{\dot{\underline{D}}}_{\underline{\nabla}\times\underline{H}-\underline{j}}\times\underline{B} + \underline{D}\times\underbrace{\dot{\underline{B}}}_{-\underline{\nabla}\times\underline{E}}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\underline{B}\times(\underline{\nabla}\times\underline{B}) - \underline{j}\times\underline{B} - \epsilon_0\underline{E}\times(\underline{\nabla}\times\underline{E})$$

Vektorumformung

$$\underline{B}\times(\underline{\nabla}\times\underline{B}) = \frac{1}{2}\underline{\nabla}(\underline{B}\cdot\underline{B}) - (\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{B}$$

- $$= \underline{\nabla}\cdot\left\{\underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}(\underline{B}\cdot\underline{B}) - \underline{B}\otimes\underline{B}\right\} + \underline{B}\underbrace{(\underline{\nabla}\cdot\underline{B})}_{0}$$

$\underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$ Einheitstensor 2. Stufe

$\underline{B}\otimes\underline{B}$ Tensorprodukt (dyad. Produkt)

$$(\underline{B}\otimes\underline{B})_{ij} = B_i B_j$$

$$[\underline{\nabla}\cdot(\underline{B}\otimes\underline{B})]_j = \sum_{i=1}^{3}\partial_i B_i B_j$$

Divergenz eines Tensors $\underline{\underline{T}}$

$$(\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}})_j = \underbrace{\partial_i T_{ij}}_{\substack{\text{Einstein-Konvention}\\ \text{Summation}}}$$

- $$\underline{E}\times(\underline{\nabla}\times\underline{E}) = \underline{\nabla}\cdot\left\{\underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{E}) - \underline{E}\otimes\underline{E}\right\} + \underline{E}\underbrace{(\underline{\nabla}\cdot\underline{E})}_{\varrho/\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\underline{D}\times\underline{B}) + \underline{\nabla}\cdot\left\{\underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}\left(\epsilon_0\underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\underline{B}^2\right) - \epsilon_0\underline{E}\otimes\underline{E} - \frac{1}{\mu_0}\underline{B}\otimes\underline{B}\right\}$$

$$= -\underbrace{(\rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})}_{\substack{\text{Kraftdichte } \underline{f} \\ \text{auf } \rho \text{ und } \underline{j} = \rho \underline{v}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \underline{g} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}} = -(\rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})}$$ Bilanzgl. für Impulstransport

$\underline{g} := \underline{D} \times \underline{B}$ Impulsdichte des Feldes

(nach Newton $\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F} \Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{g} = \underline{f}$)

$$\underline{\underline{T}} := \underline{\underline{1}} \, \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}) - \underline{E} \otimes \underline{D} - \underline{B} \otimes \underline{H}$$

Impulsstromdichte-Tensor des Feldes

(Maxwell'scher Spannungstensor)

$$T_{\alpha\beta} = \underbrace{\frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H})}_{\delta_{\alpha\beta} \, w \ \text{Energiedichte}} - E_\alpha D_\beta - B_\alpha H_\beta$$

Impulsstromdichte

$$\mathrm{Sp}\, \underline{\underline{T}} = \sum_\alpha T_{\alpha\alpha} = 3w - \sum_\alpha E_\alpha D_\alpha - B_\alpha H_\alpha$$
$$= 3w - 2w = w$$

$\underline{g}$

$\underline{\underline{T}}$ ist symm. $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} g_\beta + \partial_\alpha T_{\alpha\beta} = - f_\beta}$$

3.6 Eichinvarianz

$\underline{E}, \underline{B} \longrightarrow$ Potentiale $\phi(\underline{r},t)$, $\underline{A}(\underline{r},t)$

$$\boxed{\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \quad , \quad \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}}$$

<u>Frage</u>: allg. Trafo $\phi \to \phi'$, $\underline{A} \to \underline{A}'$, welche $\underline{E}$, $\underline{B}$ invariant läßt?

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \overset{!}{=} -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}'$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A} \overset{!}{=} \underline{\nabla}\times\underline{A}' \quad \Rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}G(\underline{r},t)$$

$$\Rightarrow -\underline{\nabla}\phi - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}} = -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}(\cancel{\underline{A}} + \underline{\nabla}G) \qquad (\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}G \equiv 0)$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla}\left(\phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G\right) = 0$$

$$\phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G = g(t) \text{ unabh. v. } \underline{r}$$

$$F(\underline{r},t) := G(\underline{r},t) - \int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{A}'(\underline{r},t) &= \underline{A}(\underline{r},t) + \underline{\nabla}F(\underline{r},t) \\ \phi'(\underline{r},t) &= \phi(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}F(\underline{r},t) \end{aligned}}$$

mit <u>beliebiger</u> Eichfkt. $F(\underline{r},t)$

Durch $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$, $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$
sind die <u>homog</u>. Maxwell-Gln. bereits erfüllt:

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\underbrace{\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi}_{0} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{\nabla}\times\underline{A}}_{\underline{B}}, \quad \underline{\nabla}\cdot\underline{B} = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) \equiv 0$$

Wähle nun eine Eichung, so dass die inhom. Maxwell-glen. besonders einfach werden.

(i) Entkopplung der Wellenglen. für $\underline{A}$ und ϕ:

Lorentz-Eichung $\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\phi = 0}$

$\Rightarrow$ Feldglen. entkoppelt

a) $-\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

Lorentz-Eichung:

$$\boxed{\Delta\phi - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho}$$

b) $\frac{1}{\mu_0}\underline{\nabla}\times\underline{B} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{E} = \underline{j}$

$$\underbrace{\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})}_{\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \Delta A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}A\right) = \mu_0\underline{j}$$

$$\boxed{\Delta\underline{A} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} - \underline{\nabla}\underbrace{\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)}_{0 \quad \text{Lorentz-Eichung}} = -\mu_0\underline{j}}$$

Mit d'Alembert-Operator $\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$:

$$\boxed{\begin{aligned}\Box\phi &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \Box\underline{A} &= -\mu_0\underline{j}\end{aligned}}$$

inhomog. Wellenglen.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.994 \times 10^8 \, \frac{m}{s}$$ Lichtgeschwindigkt.

(= Ausbreit.geschw. der el. magn. Wellen im Vakuum)

(ii) Coulomb-Eichung (Strahlungseichung)

$$\boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0}$$