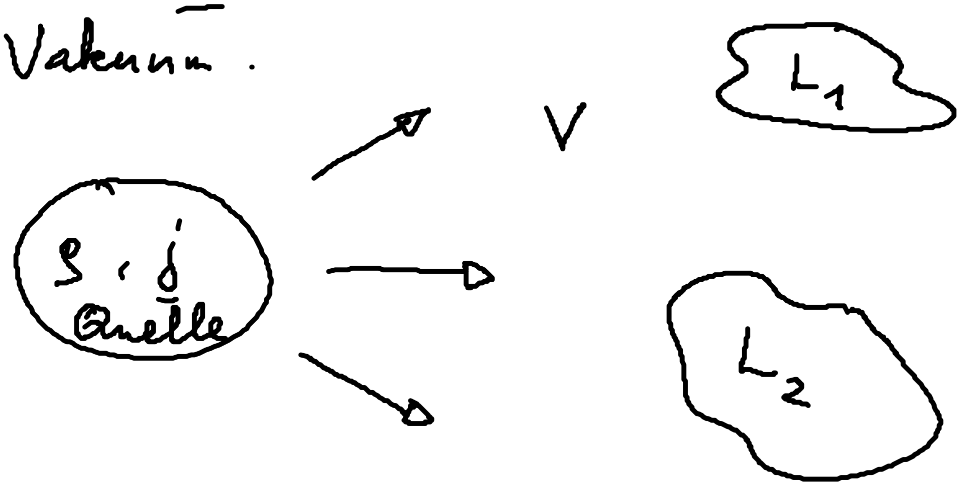
4.4 Wellenoptik und Beugung

Problem: Ausbreitung elektromagn. Wellen bei geg., lokalisierten Quellen $\varrho(\underline{r}, t)$ und $\underline{j}(\underline{r}, t)$ und vorgegebenen Leitern L_α im Vakuum.



Ziel: Berechnung des Wellenfeldes im Außenraum V.

Anwendung: Radiowellen ($\lambda \sim 1 - 10^4$ m)
Radar
Optik ($\lambda \sim 400 - 800$ nm)
$\longrightarrow$ Beugung

Zurückführung auf Randwertaufgabe

Lösung der inhomog. Wellengln.

$$\left.\begin{aligned} \Box \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \Box \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}\right\} \text{Lorentzeichung}$$

zu vorgeg. $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$ und Randbed. auf L_α sowie Kausalitätsbedingung (Ausstrahlungsbed., vgl. §4.2)

<u>Annahme</u> $\left.\begin{aligned} \rho(\underline{r},t) &= \rho(\underline{r})e^{-i\omega t} \\ \underline{j}(\underline{r},t) &= \underline{j}(\underline{r})e^{-i\omega t} \end{aligned}\right\}$ <u>period. Erregung</u>

$$\Rightarrow \phi(\underline{r},t) = \phi(\underline{r})e^{-i\omega t}$$
$$\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r})e^{-i\omega t}$$

eingesetzt in die Wellengl. $\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$

$$\boxed{(\Delta + k^2)\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})} \qquad \boxed{k := \frac{\omega}{c}}$$

Green'sche Fkt. der Wellengl. $\Box\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$

$$\Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')$$

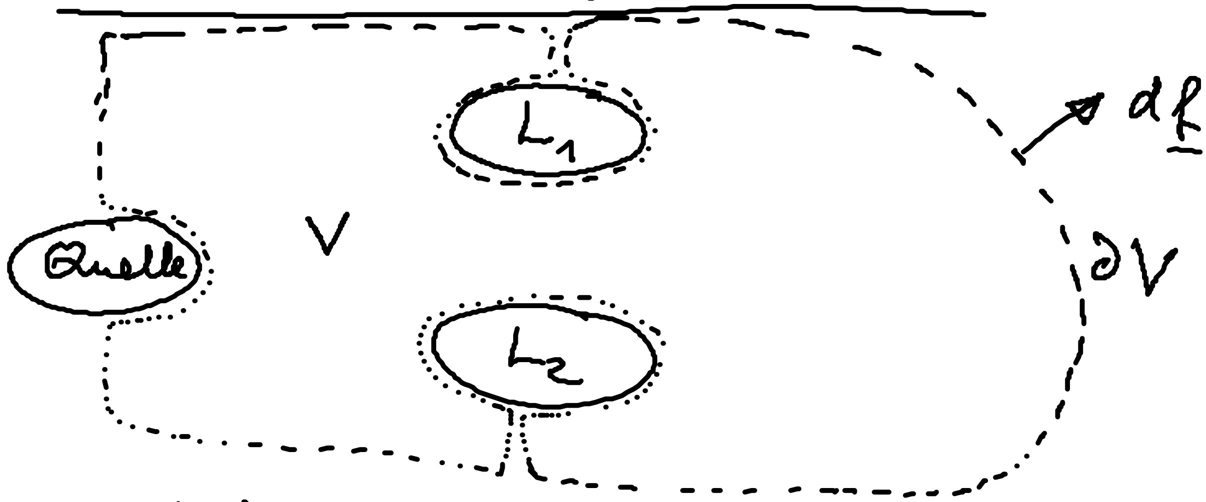
allg. $\phi(\underline{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', \underbrace{t-t'}_{\tau})\, \rho(\underline{r}',t')/\epsilon_0$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underbrace{\underbrace{\int_{-\infty}^{t} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, e^{-i\omega t'}}_{\int_0^\infty d\tau\, G(\underline{r}-\underline{r}',\tau)\, e^{+i\omega\tau}\, e^{-i\omega t}}}_{=:\ \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')} \rho(\underline{r}')/\epsilon_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\underline{r}) &= \int d^3r'\, \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\, \rho(\underline{r}')/\epsilon_0 \\ (\Delta + k^2)\, \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') &= -\delta(\underline{r}-\underline{r}') \end{aligned}}$$

Umformulierung der Randbed. durch Green'schen Satz

Skalare Kirchhoff-Identität



Green'scher Satz $\int_{\partial V} d\underline{f}\,(\varphi \underline{\nabla}\psi - \psi\underline{\nabla}\varphi) = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)$

Setze $\psi(\underline{r}) = \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')$

$\varphi(\underline{r}) = \phi(\underline{r})$ sei Lösung

$$\Longrightarrow \int_{\partial V} d\underline{f}\,\left(\phi\, \underline{\nabla}_r \tilde G(\underline r-\underline r') - \tilde G(\underline r-\underline r')\,\underline{\nabla}_r \phi\right) = \int_V d^3r\,\Big(\phi\, \underbrace{\Delta\tilde G}_{-\delta - \cancel{k^2\tilde G}} - \tilde G\, \underbrace{\Delta\phi}_{-\underbrace{\rho/\epsilon_0}_{0} - \cancel{k^2\phi}}\Big)$$

Quelle $\notin V$

$$= -\phi(\underline r')$$

$$\boxed{\phi(\underline r') = \int_{\partial V} d\underline f\,\left[\tilde G(\underline r-\underline r')\,\underline{\nabla}_r\phi(\underline r) - \phi(\underline r)\,\underline{\nabla}_r \tilde G(\underline r-\underline r')\right]} \qquad \underline r' \in V$$

(a) Greenfkt. des unendl. Raumes:

Randbed. $\tilde G(\underline r-\underline r') \to 0$ für $r\to\infty$

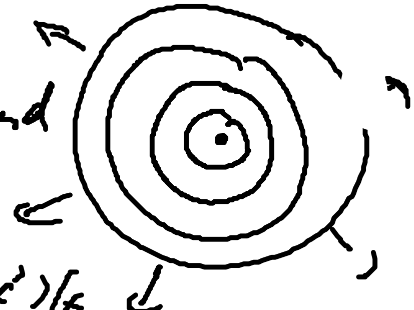
$\Longrightarrow$ retard. Pot. (§4.2)

$$G(\underline r-\underline r', \underbrace{t-t'}_{\tau}) = \begin{cases} \dfrac{\delta\left(\tau - \frac{|\underline r-\underline r'|}{c}\right)}{4\pi|\underline r-\underline r'|} & \tau>0 \\ 0 & \tau<0 \end{cases}$$

$$\boxed{\tilde G(\underline r-\underline r') := \int_0^\infty d\tau\, G(\underline r-\underline r',\tau)\, e^{i\omega\tau} = \frac{e^{ik|\underline r-\underline r'|}}{4\pi|\underline r-\underline r'|}}$$

$\Rightarrow$ speziell $\phi_{\underline r'}(\underline r,t) = \dfrac{e^{i(k|\underline r-\underline r'|-\omega t)}}{4\pi|\underline r-\underline r'|}$ mit $k := \omega/c$

Kugelwelle, vom Ort $\underline r'$ ausgehend
$(\rho(\underline r) = \delta(\underline r-\underline r'))$

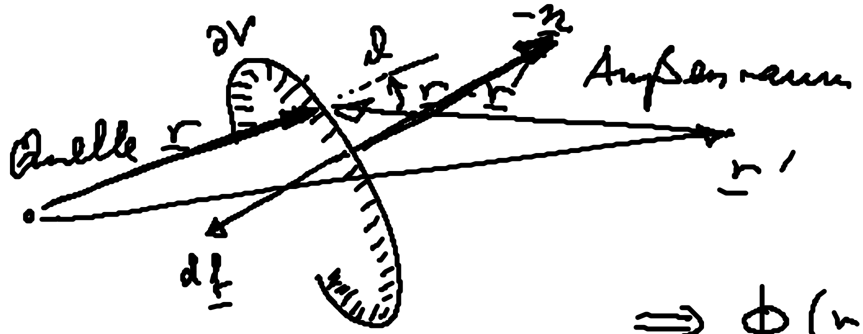


allg. $$\phi(\underline r,t) = \int_{\mathbb R^3} d^3r'\, \tilde G(\underline r-\underline r')\, e^{-i\omega t}\, \rho(\underline r')/\epsilon_0$$

$$= \int_{\mathbb R^3} d^3r'\, \frac{e^{i(k|\underline r-\underline r'|-\omega t)}}{4\pi|\underline r-\underline r'|}\, \rho(\underline r')/\epsilon_0$$

Überlagerung <u>auslaufender Kugelwellen</u>

Kirchhoff-Identität



$$\Rightarrow \phi(\underline{r}') = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} d\underline{f}_R \left\{ \frac{e^{ikR}}{R}\nabla_r\phi - \phi\nabla_r \frac{e^{ikR}}{R}\right\}$$

$\underline{R} := \underline{r}-\underline{r}'$

<u>Fernzone</u> von ∂V $\quad \boxed{R \gg \frac{1}{k}}$

$$\boxed{\phi(\underline{r}') \approx \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} d\underline{f}_R \underbrace{\underbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial n}\phi(\underline{r}) - ik\phi(\underline{r})\cos\vartheta\right\}}_{\text{richtungsabh. Amplitude}} \underbrace{\frac{e^{ikR}}{R}}_{\text{Kugelwelle}}}_{\text{„Sekundärwelle"}}}$$

Exakte Formulierung des <u>Hugens'sches Prinzip</u>

(Jeder Pkt. der Oberfläche eines Hindernisses ist Ausgangspkt. einer Kugelwelle, deren phasengerechte Überlagerung ergibt das Wellenfeld in $\underline{r}'$.)

(b) <u>Greenfkt. zu Randbed.</u> $\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\substack{\underline{r}\in\partial V \\ \underline{r}'\in V}} = 0$

$$\boxed{\phi(\underline{r}') = -\int_{\partial V} df\, \phi(\underline{r})\, \underline{\nabla}_r \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')}$$

Diese neue Greenfkt. unterscheidet sich von der alten nur um eine additive Lösung g der homogenen Wellengl.

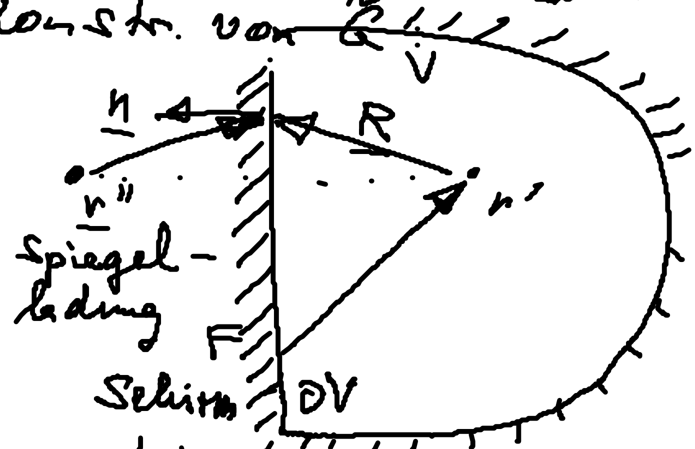
$$\tilde{G}(\underline{R}) = g(\underline{R}) + \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}$$

$$(\Delta + k^2)\, g = 0 \quad \text{mit} \quad g\Big|_{\partial V} = \underbrace{-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\Big|_{\partial V}}_{\text{alter Term}}$$

Beispiel für Konstr. von $\tilde{G}$

<u>Ebener Schirm</u>

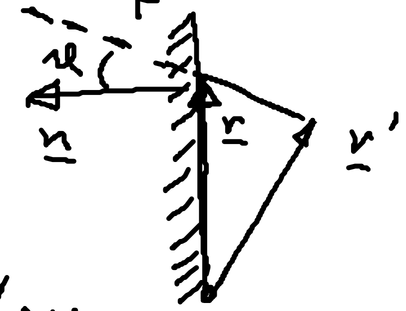
Spiegellad.-meth.



$$\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}''|}}{|\underline{r}-\underline{r}''|}\right)$$

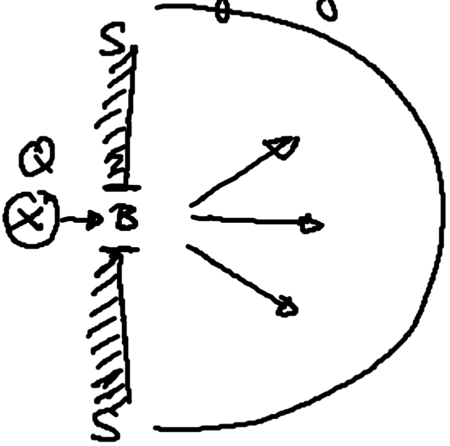
$$\boxed{\underline{\nabla}\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{i}{\lambda}\int_F df\, \phi(\underline{r})\, \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\cos\vartheta}$$

F



Kirchhoff'sche Näherung:

Beugung an Blenden in einem ebenen Schirm S



Annahme: $\phi(r)\big|_S = 0$

$$\phi(\underline{r})\big|_B = \frac{e^{ikR^Q}}{R^Q}$$

(freie einfall. Welle)

$$\phi(\underline{r}') = -\frac{i}{\lambda}\int_B df \, \frac{e^{ik(R+R^Q)}}{R R^Q} \cos\vartheta$$

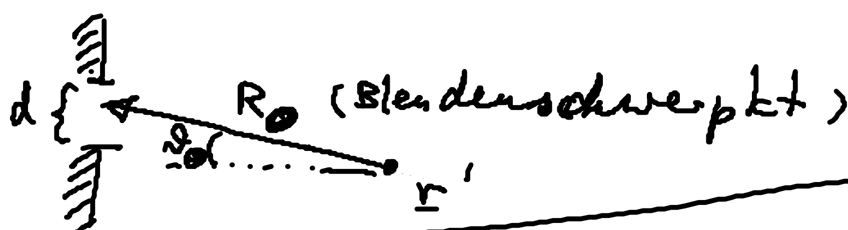
$\underline{R} = \underline{r} - \underline{r}'$

$\underline{R}^Q = \underline{r} - \underline{r}^Q$

$df = d^2 r$

Kleine Blende

$\lambda \ll d$



$$\boxed{\phi(\underline{r}') \approx -\frac{i}{\lambda}\frac{\cos\vartheta_0}{R_0 R_0^Q}\int_B df \, e^{ik(R+R^Q)}}$$

Grenzfälle

(i) **Fraunhofer'sche Beugung**

(Fernzone: $\lambda \ll d \ll R$)