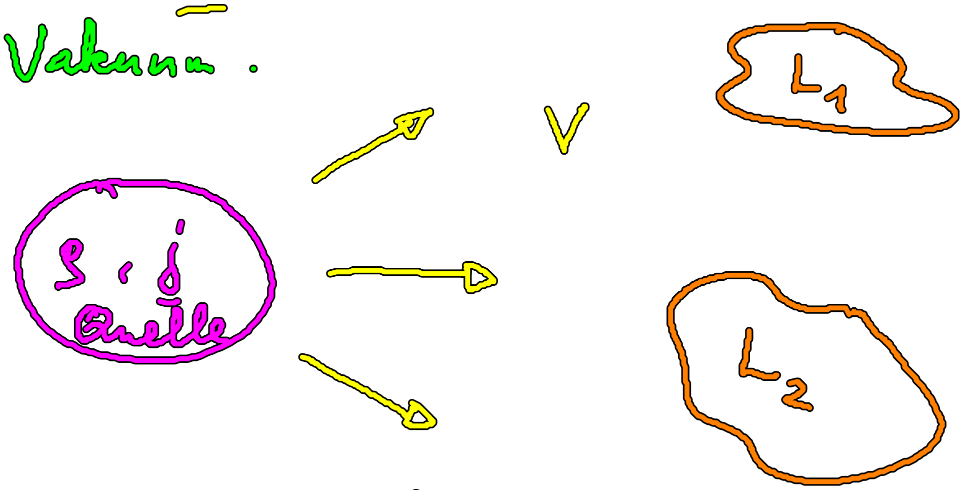
4.4 Wellenoptik und Beugung

Problem: Ausbreitung elektromagn. Wellen bei geg., lokalisierten Quellen $\rho(\underline{r}, t)$ und $\underline{j}(\underline{r}, t)$ und vorgegebenen Leitern L_α im Vakuum.



Ziel: Berechnung des Wellenfeldes im Außenraum V.

Anwendung: Radiowellen ($\lambda \sim 1 - 10^4$ m)
Radar
Optik ($\lambda \sim 400 - 800$ nm)
$\longrightarrow$ Beugung

Zurückführung auf Randwertaufgabe

Lösung der inhomog. Wellengln.

$$\left.\begin{aligned} \Box\phi &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \Box\underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}\right\}\ \text{Lorentzeichung}$$

zu vorgeg. $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$ und Randbed. auf L_α sowie Kausalitätsbedingung (Ausstrahlungsbed., vgl. §4.2)

Annahme
$$\left.\begin{aligned} \rho(\underline{r},t) &= \rho(\underline{r})e^{-i\omega t} \\ \underline{j}(\underline{r},t) &= \underline{j}(\underline{r})e^{-i\omega t} \end{aligned}\right\}\ \text{period. Erregung}$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r},t) = \phi(\underline{r})e^{-i\omega t}$$
$$\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r})e^{-i\omega t}$$

eingesetzt in die Wellengl. $\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$

$$\boxed{(\Delta + k^2)\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})} \qquad \boxed{k := \frac{\omega}{c}}$$

Green'sche Fkt. der Wellengl. $\Box\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$

$$\Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')$$

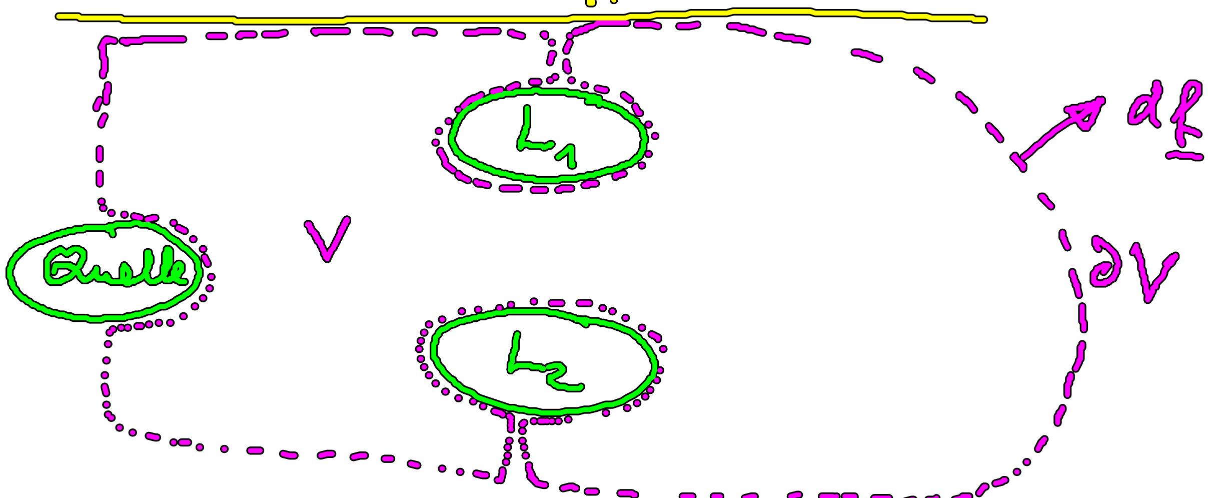
allg. $\Phi(\underline{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', \underbrace{t-t'}_{\tau})\, \rho(\underline{r}',t')/\epsilon_0$

$$= \int_{R^3} d^3r' \underbrace{\int_{-\infty}^{t} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, e^{-i\omega t'}}_{\underbrace{\int_0^{\infty} d\tau\, G(\underline{r}-\underline{r}', \tau)\, e^{+i\omega\tau}\, e^{-i\omega t}}_{=:\ \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')}} \rho(\underline{r}')/\epsilon_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(\underline{r}) &= \int d^3r'\, \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\, \rho(\underline{r}')/\epsilon_0 \\ (\Delta + k^2)\, \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') &= -\delta(\underline{r}-\underline{r}') \end{aligned}}$$

Umformulierung der Randbed. durch <u>Green'schen Satz</u>

<u>Skalare Kirchhoff-Identität</u>



Green'scher Satz $\int_{\partial V} d\underline{f}\,(\varphi \underline{\nabla} \psi - \psi \underline{\nabla} \varphi) = \int_V d^3r\,(\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi)$

Setze $\psi(\underline{r}) = \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')$

$\varphi(\underline{r}) = \Phi(\underline{r})$ sei Lösung

$$\Longrightarrow \oint_{\partial V} d\underline{f}\,\left(\phi\,\underline{\nabla}_r \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') - \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\,\underline{\nabla}_r \phi\right) = \underbrace{\int_V d^3r\,\Big(\phi \underbrace{\Delta\tilde{G}}_{-\delta-\cancel{k^2\tilde{G}}} - \tilde{G}\underbrace{\Delta\phi}_{-\underbrace{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}_{0} - \cancel{k^2\phi}}\Big)}_{-\phi(\underline{r}')}$$

Quelle $\notin V$

$$\boxed{\phi(\underline{r}') = \oint_{\partial V} d\underline{f}\,\left[\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\,\underline{\nabla}_r\phi(\underline{r}) - \phi(\underline{r})\,\underline{\nabla}_r\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\right]} \qquad \underline{r}' \in V$$

(a) Greenfkt. des unendl. Raumes:

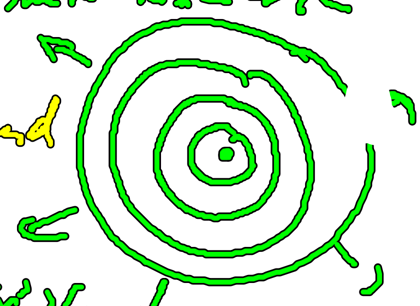
Randbed. $\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \to 0$ für $r \to \infty$

$\Longrightarrow$ retard. Pot. (§ 4.2)

$$G(\underline{r}-\underline{r}', \underbrace{t-t'}_{\tau}) = \begin{cases} \dfrac{\delta\left(\tau - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') := \int_0^\infty d\tau\, G(\underline{r}-\underline{r}',\tau)\, e^{i\omega\tau} = \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}}$$

$\Rightarrow$ speziell $\phi_{\underline{r}'}(\underline{r},t) = \dfrac{e^{i(k|\underline{r}-\underline{r}'|-\omega t)}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$ mit $k := \omega/c$



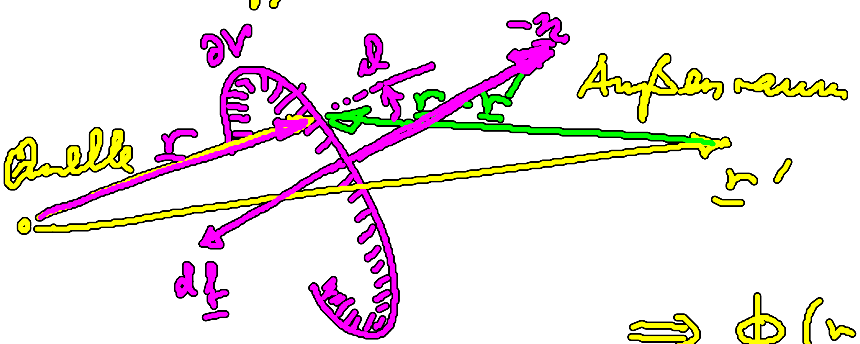
Kugelwelle, vom Ort $\underline{r}'$ ausgehend
($\rho(\underline{r}) = \delta(\underline{r}-\underline{r}')$)

allg. $$\phi(\underline{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\, e^{-i\omega t}\, \rho(\underline{r}')/\varepsilon_0$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \frac{e^{i(k|\underline{r}-\underline{r}'|-\omega t)}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\, \rho(\underline{r}')/\varepsilon_0$$

Überlagerung auslaufender Kugelwellen

Kirchhoff-Identität



$$\Rightarrow \phi(\underline{r}') = \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} d\underline{f}_R \left\{ \frac{e^{ikR}}{R}\nabla\phi - \phi\nabla \frac{e^{ikR}}{R} \right\}$$

$\underline{R} := \underline{r} - \underline{r}'$

Fernzone von ∂V $\quad \boxed{R \gg \frac{1}{k}}$

$$\boxed{\phi(\underline{r}') \approx \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} df_R \underbrace{\underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial n}\phi(\underline{r}) - ik\phi(\underline{r})\cos\vartheta \right\}}_{\text{richtungsabh. Amplitude}} \underbrace{\frac{e^{ikR}}{R}}_{\text{Kugelwelle}}}_{\text{„Sekundärwelle"}}}$$

Exakte Formulierung des Huygens'sches Prinzip

(Jeder Pkt. der Oberfläche eines Hindernisses ist Ausgangspkt. einer Kugelwelle, deren phasengerechte Überlagerung ergibt das Wellenfeld in $\underline{r}'$.)

(b) <u>Greenfkt. zu Randbed.</u> $\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\substack{\underline{r}\in\partial V\\ \underline{r}'\in V}} = 0$

$$\boxed{\Phi(\underline{r}') = -\oint_{\partial V} d\underline{f}\,\Phi(\underline{r})\,\underline{\nabla}_r\,\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')}$$

Diese neue Greenfkt. unterscheidet sich von der alten nur um eine additive Lösung g der homogenen Wellengl.

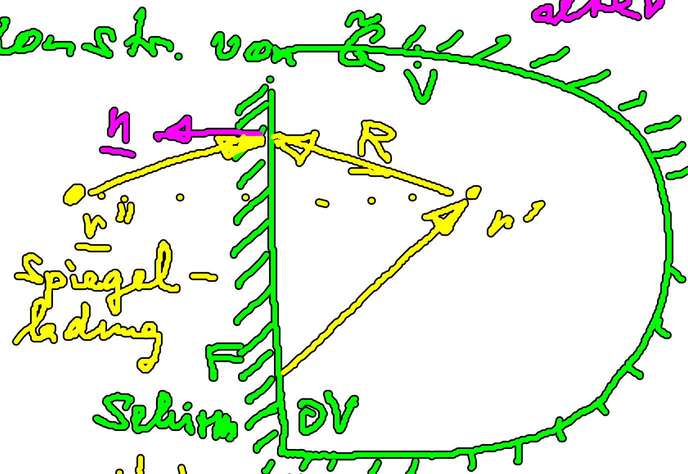
$$\tilde{G}(\underline{R}) = g(\underline{R}) + \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}$$

$$(\Delta + k^2)\,g = 0 \quad \text{mit} \quad g\Big|_{\partial V} = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\Big|_{\partial V}$$

alter Term

Beispiel für Konstr. von $\tilde{G}$:

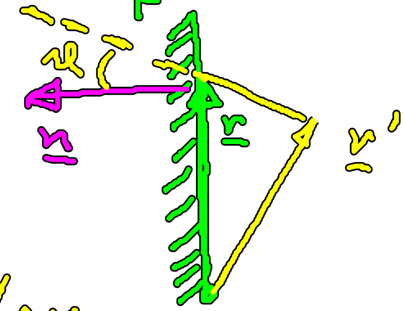
<u>Ebener Schirm</u>



Spiegellad.meth.

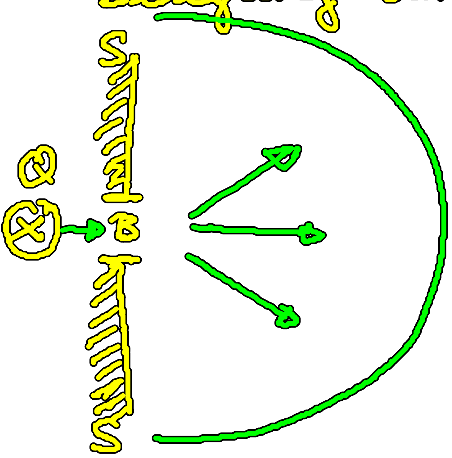
$$\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}''|}}{|\underline{r}-\underline{r}''|}\right)$$

$$\boxed{\underline{\nabla}\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{i}{\lambda}\int_F df\,\Phi(\underline{r})\,\frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\cos\vartheta}$$



Kirchhoff'sche Näherung:

Beugung an Blenden in einem ebenen Schirm S



Annahme: $\Phi(r)\big|_S = 0$

$$\Phi(\underline{r})\big|_B = \frac{e^{ikR^Q}}{R^Q}$$

(freie einfall. Welle)

$$\Phi(\underline{r}') = -\frac{i}{\lambda}\int_B df\, \frac{e^{ik(R+R^Q)}}{RR^Q}\cos\alpha$$

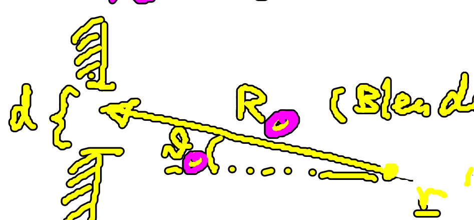
$\underline{R} = \underline{r} - \underline{r}'$

$\underline{R}^Q = \underline{r} - \underline{r}^Q$

$df = d^2r$

Kleine Blende

$\lambda \ll d$



$$\boxed{\Phi(\underline{r}') \approx -\frac{i}{\lambda}\frac{\cos\alpha_0}{R_0 R_0^Q}\int_B df\, e^{ik(R+R^Q)}}$$

Grenzfälle

(i) Fraunhofer'sche Beugung

(Fernzone: $\lambda \ll d \ll R$)