

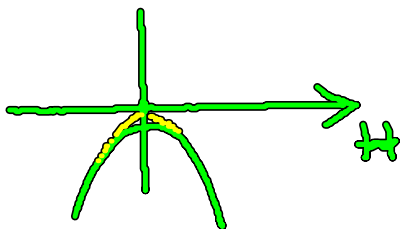
14.11.



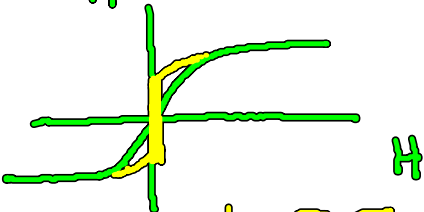
14.11.

Magnet

G

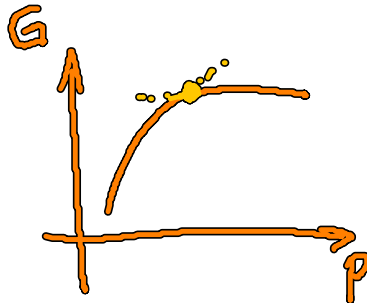


$$M = -\partial G / \partial H | T$$

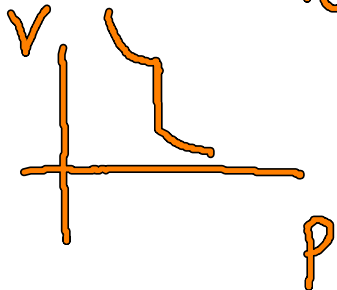


bei $T = T_c$

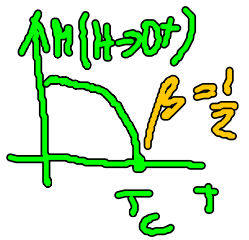
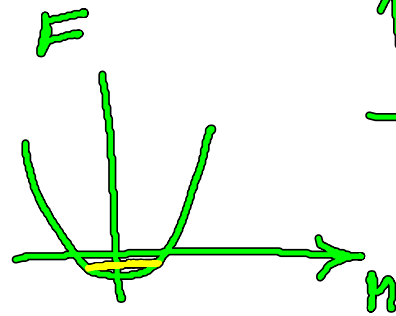
Fluid



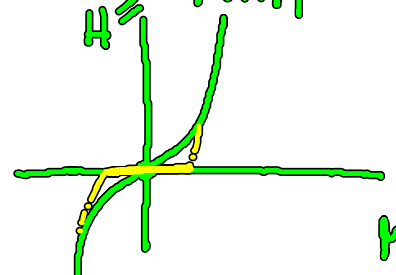
$T < T_c$



M



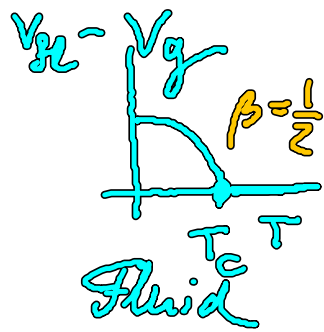
$$H = \partial F / \partial M | T$$



auch unterhalb T_c

$$M(H \rightarrow 0^+) > 0 \quad \text{für } T < T_c$$

$$M(H \rightarrow 0^+) = 0 \quad \text{für } T > T_c$$



Kritische Exponenten

Im Analogie zum Fluid (van-der-Waals gas)

$$M(T, H \rightarrow 0) \propto (-\epsilon)^{\beta} \quad T < T_c \quad \epsilon = \frac{T - T_c}{T_c}$$

Exponent β
für Ordnungsparameter

$$\chi_T = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_T \propto \begin{cases} \epsilon^{-\gamma} & T > T_c \\ (-\epsilon)^{-\gamma'} & T < T_c \end{cases}$$

isotherme
Suszeptibilität

$$C_H(H=0) = \left. \frac{\partial E_{th.}}{\partial T} \right|_{H=0} \propto \begin{cases} (-\epsilon)^{-d'} & T < T_c \\ \epsilon^{-d} & T > T_c \end{cases}$$

Exponenten messen oder mit bestimmten Modellen
berechnen, z.B. d', β, γ' .

$$d' + 2\beta + \gamma' \geq 2$$

Rushbrooke - Ungleichung

~~$$\frac{\sqrt{5}}{8} < 2$$~~

Exponenten - Ungleichungen

• Ausgangspunkt ist $\chi_T (C_H - C_N) = T \alpha_H^2 \parallel$

$$C_N = \left. \frac{\partial k}{\partial T} \right|_N; \quad C_H = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_H; \quad \alpha_H = \left. \frac{\partial M}{\partial T} \right|_H$$

- Argument: F ist konvex in Temperatur T (Stabilitätsargument)

$$C_H = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

spezi. Wärme bei $n = \text{const}$

$$dU = TdS + HdM$$

$$= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \Big|_n dT + \frac{\partial S}{\partial n} \Big|_T dn \right) + HdM$$

$$\Rightarrow C_H = \frac{\partial U}{\partial T} \Big|_n = T \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_n;$$

$$dF = -SdT + HdM$$

$$\Rightarrow C_H = -T \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial F}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \Rightarrow S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

$$\Rightarrow C_H \geq 0$$

$$\text{Also } C_H = \frac{T d_H^2}{\chi_T} + C_H \geq \frac{T d_H^2}{\chi_T}$$

Setzt kritisches Verhalten für $T < T_c$ einsetzen:

$$C_H \propto (-\varepsilon)^{-d'}, \quad \chi_T \propto (-\varepsilon)^{-\gamma'}, \quad d_H \propto (-\varepsilon)^{\beta-1}$$

$$(-\varepsilon)^{-d'} \geq \text{const} \cdot (-\varepsilon)^{2(\beta-1)} (-\varepsilon)^{\gamma'}$$

$$g(x) \geq f(x)$$

\uparrow \uparrow
 x^φ x^λ

Lemma: $f(x) \leq g(x)$ und $f(x) \propto x^\lambda$, $g(x) \propto x^\varphi$
 für $x \rightarrow 0^+$. Dann $\lambda \geq \varphi$

$$\rightarrow \lambda = 2(\beta - 1) + \gamma', \quad \varphi = -d'$$

$$2(\beta - 1) + \gamma' \geq -d'$$

$$\boxed{d' + 2\beta + \gamma' \geq 2} \quad \text{Rushbrooke inequality}$$

Weitere Ungleichungen ebenfalls herleitbar.

Cooper-Smith, Griffiths, Buchdahl - Funktion
Fisher etc.

Große Systeme

Zahl der Freiheitsgrade $F \gg 1$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}$
 mikroskopische

1) Klassische Hamiltonsche Systeme

Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(q, p)$

$$q = q_1, \dots, q_F$$

$$p = p_1, \dots, p_F$$

$$F \gg 1$$

Die q_i 's sind
 orthogonalisierte Ko.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \text{Hamiltonsche Gleichungen}$$

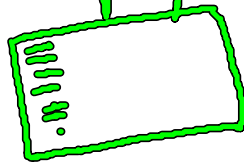
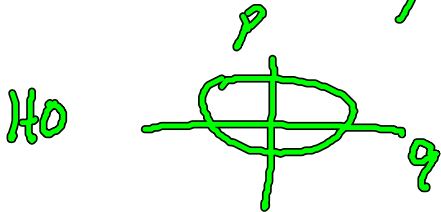
Der $2F$ -dimensionale Phasenraum der q_i, p_i

heißt Γ -Raum.

Def: (Anfangswertaufgabe): gegeben (q, p) zur Zeit $t = t_0$. Bestimme (q, p) für $t \neq t_0$.

PROBLEM: 1) Fast immer nicht (praktisch) lösbar.

2) Anfangszustand (q, p) kann praktisch gar nicht präpariert werden.



Quantenmechanik

System mit $F + F_S \Rightarrow$ | Freiheitsgrade

$$\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_F$$

$$\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_F$$

Def: Anfangswertaufgabe: gegeben $|\psi(t_0)\rangle$, bestimme

$$|\psi(t)\rangle \text{ gemäß } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Def: Spektralaufgabe: Löse das Eigenwertproblem!

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Problem 1+2 wie in Klassik unlösbar.

Spektal Aufgabe, Abschätzung $F_S = 0$

Lösung im Hilbertraum $\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_F$

- Schon für $F=1$ nicht lösbar wegen dem $\mathcal{H}_1 = d$ sehr groß

z.B. $d = 10$, $F = 10^{20}$

\Rightarrow Matrix der Dimension $d_F = \underbrace{d \dots d}_{10^{20}} = d^F$

$= 10^{10^{20}}$

Riesige Zahlen ; „Turm-Zahlen“

üblicherweise

$N = 10^{20}$

ist groß!

Die Zahl

$N = 10^{10^{10^{10}}}$

sehr viel größer.

z.B.

$10^{20} = 10^{10} \cdot 10^{10}$ aber

$10^{10^{20}}$

$= 10^{10^{10} \cdot 10^{10}}$

$= (10^{10^{10}})^{10^{10}}$

„Power-Towers“

Def:

$a \uparrow\uparrow k = \underbrace{a^{a^{a \dots a}}}_{k\text{-mal}}$

k -fach, $k=1,2,\dots$

$a \uparrow\uparrow 1 = a$

Interessant ist z.B. $z \uparrow k$; $e^z \uparrow k$

Unendliche Power-Towers, $h(z) = z \uparrow \infty$

z^{z^z}  $= z^{z^{z^{\dots}}}$

Zsh mit Statistik:

Klassik: $F = 10 \uparrow 2$ Freiheitsgrade

DGL System der Größe $2F$,

Lösen bis zur Zeit T ,

Aufwand $\propto 2 \cdot T \cdot F = 2T \cdot 10 \uparrow 2$

QM: Spektralproblem mit $F = 10 \uparrow 2$
 $d = 10$ (Stillestramdimension)

$d^F = 10 \uparrow 3$

Frage: Gibt es höhere $k = 4, 5, 6, \dots$

Fazit: Spektralaufgabe ist praktisch
nie lösbar

- Answer:
- a) Maschine, z.B. Q-Computer (fraglich)
 - b) stat. Methode