12. Dez. 06

12. Dez. 2006

Freie Fermionen in $d=3$

Q Zahlen $\quad l = (\vec{k}, \sigma)$

$\psi_{\vec{k},\sigma}$ 1-Teilchen Wfunktionen

$$\varepsilon_\ell \equiv \varepsilon_{\vec{k},\sigma} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

σ: Spin-Quantenzahl, Gesamtspin s (z.B $s=\frac{1}{2}$ für Elektronen). Insgesamt

$$g_s \equiv 2s+1 \qquad \text{Spinprojektionen}$$

z.B $g_{1/2} = 2$ für $s=\frac{1}{2}$, nämlich

$$\boxed{\sum_{\vec{k}} \mapsto \frac{V}{(2\pi)^d}\int d^d k} \quad V\to\infty$$

$$\chi_{1/2} \equiv \chi_\uparrow \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\chi_{-1/2} \equiv \chi_\downarrow \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

keine Spin-Bahn-Kopplung
keine Zeeman-Terme

$$\Omega = -\frac{1}{\beta}\ln Z_{gk} = -k_B T \sum_{(\vec{k},\sigma)} \ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}\right)$$

$$= -k_B T\, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Spinentartung}}}{g_s} \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}\right)$$

$\vdots$

$$= -k_B T\, g_s \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \qquad \lambda \equiv \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

th. Wellenlänge

$$z \equiv e^{\beta\mu} \qquad \text{Fugazität}$$

?

$$f_{5/2}(z) \equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx\, x^2 \ln\left(1 + z e^{-x^2}\right)$$

$$f_k(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n^k}$$

Chem. Potential μ bzw. die Fugazität $z = e^{\beta\mu}$ nun durch mittlere Teilchendichte, n, ausdrücken.

$$\underline{N} = \frac{\sum_n n\, e^{\beta\mu n} Z(\beta, n)}{\sum e^{\beta\mu n} Z(\beta, n)} = \frac{\sum_n n z^n Z(\beta, n)}{\sum z^n Z(\beta, n)}$$

$$= \underline{z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z_{gk}} \, ; \quad Z_{gk} = \sum z^n Z(\beta, n)$$

$$\Rightarrow \quad n \equiv \frac{N}{V} = \frac{g_s}{\lambda^3} \underbrace{z \frac{\partial}{\partial z} f_{5/2}(z)}_{f_{3/2}(z)} = \frac{g_s}{\lambda^3} f_{3/2}(z)$$

Zusammen also folgt die thermische Zust.gleichung

$$\boxed{\frac{p}{k_B T} = \frac{g_s}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \, ; \quad n = \frac{g_s}{\lambda^3} f_{3/2}(z)}$$

nach z

Jetzt klassischer Limes:

betrachte Fermi-Funktion $\left(\varepsilon = p^2/2m \right)$ auflösen

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} = \frac{1}{\frac{1}{z}e^{\beta\varepsilon}+1}$$

$z = e^{\beta\mu}$

$$\stackrel{z\ll 1}{=} z\, e^{-\beta\varepsilon} + O(z^2) = z\, e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}}$$

Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

Offensichtlich (klassisch) klassischer Limes für $z \ll 1$.

Dann $\quad f_{5/2}(z) = z + \dots \qquad f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n^k}$

$\qquad f_{3/2}(z) = z + \dots$

Damit also

$$\frac{p}{k_BT} = \frac{g_s}{\lambda^3} z + \dots, \qquad n = \frac{g_s}{\lambda^3} z + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{p}{k_BT} = \frac{N}{V} + \dots \qquad \text{klassisches ideales Gas!}$$

kleines z: $\quad z \approx \frac{\lambda^3 n}{g_s} + \dots \ll 1$

therm. Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_BT}} \ll$ mittlerer Teilchenabstand kl. Limes nach de Broglie's

Aufgabe: Entwicklung um klassischen Limes

Freie Fermionen in d Dimensionen:

$$\nu_1(\varepsilon) \equiv \sum_{l=1}^{D} \delta(\varepsilon - \varepsilon_l) = \sum_{\vec{k}\sigma} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{k}})$$

$$= g_S \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k = k^2$$

$$(\hbar = 2m = 1)$$

$$\| \nu_1(\varepsilon) = c_d V \varepsilon^{d/2 - 1} \theta(\varepsilon), \quad V \to \infty \|$$

1-Teilchenzustandsdichte

$$c_d = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$

$\boxed{\text{Druck und Energie}}$

$$pV = -k_B T \ln Z_{gk} = -k_B T \int d\varepsilon\, \nu_1(\varepsilon) \times$$

$$\times \ln\left[1 + e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}\right]$$

$$\mathcal{U} = \int d\varepsilon\, \nu_1(\varepsilon)\, \varepsilon\, f(\varepsilon)$$

part. Integr. $\underline{pV} = \int d\varepsilon \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon} dE\, \nu_1(E) \right)} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$

$$= \int d\varepsilon\, \frac{2}{d}\, \varepsilon\, f(\varepsilon)\, \nu_1(\varepsilon) = \underline{\frac{2}{d}\, \mathcal{U}}$$

$d = 3$: $\boxed{P = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{U}}{V}}$

Sommerfeld - Entwicklung:

$$\int d\varepsilon\, f(\varepsilon)\, g(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon\, g(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(\mu) + \dots$$

$$* \; N/V = c_d \left[\int_0^{\mu} dE\, E^{\frac{d}{2}-1} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left(\frac{d}{2}-1\right) \mu^{\frac{d}{2}-2} + O(T^4) \right]$$

$$\mathcal{U}/V = c_d \left[\int_0^{\mu} dE\, E^{\frac{d}{2}} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{d}{2} \mu^{\frac{d}{2}-1} + O(T^4) \right]$$

Chem. Potential bei tiefen Temperaturen als Fkt. der (vorgegebenen) Dichte $n = N/V$:

$$\mu = \left[\left(\frac{d}{2} \frac{n}{c_d} \right)^{2/d} - \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left(\frac{d}{2}-1\right) \frac{d}{2} \mu^{\frac{d}{2}-2} + \dots \right]^{2/d}$$

$O(T^4)$

$\underline{T=0}$: $\mu = \left(\frac{d}{2} \frac{n}{c_d} \right)^{2/d}$, denn

$$n = c_d \left[\frac{2}{d} \mu^{d/2} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left(\frac{d}{2} - 1\right) \mu^{d/2 - 2} + \dots \right]$$

Damit

$$\mu = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2 \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - 1\right) \left(\frac{\mu}{E_F}\right)^{\frac{d}{2} - 2} + \dots \right]^{2/d}$$

$$\Big\| \quad E_F = \mu(T=0) = \left(\frac{d}{2} \frac{n}{c_d}\right)^{2/d}$$

Fermienergie und Dichte n

Gleichung vom Typ $\quad x = f(x)$

$$\Rightarrow \quad \mu = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{E_F}\right)^2 \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - 1\right) + \dots \right]^{2/d}$$

$$= E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2 \left(\frac{d}{2} - 1\right) + \dots \right]$$

Also

$$\boxed{\frac{\mu}{E_F} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{d}{2} - 1\right) \left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2 + O(T^4)}$$

$d = 3$: μ sinkt mit wachsendem T

$d = 2$: μ ändert sich nicht in niedr. Ordnung

$d = 1$ μ wächst mit wachsendem T

$\Rightarrow$ Dimension d ist wichtig!
$d = 2$ ist die Grenze

jetzt $d = 3$: Spin $s = \frac{1}{2}$ (Elektronen)

Dann $n = k_F^3 / 3\pi^2$, $E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$

k_F Fermi-Wellenvektor

$$n = \frac{(2m E_F/\hbar^2)^{3/2}}{3\pi^2}$$

Beispiel: Metallelektronen
$E_F \approx 3 eV$ für Natrium

Fermiflüssigkeitstheorie (Landau)

Kalorische Zust. Gleichung

Man findet $$U/V = E_F^{\frac{d}{2}+1} \frac{c_d}{\frac{d}{2}+1}\left[1 + \left(\frac{d}{2}+1\right)\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2 + \dots\right]$$

Jetzt mit $N/V \equiv n = c_d \frac{2}{d} E_F^{d/2}$

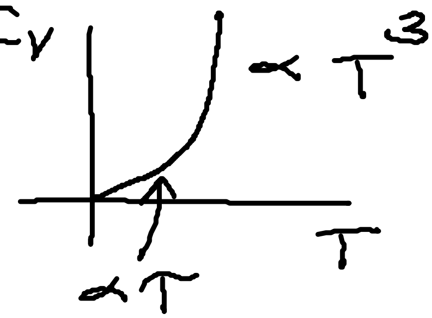
$$\Rightarrow U = \frac{d}{d+2} E_F N \left[1 + \left(\frac{d}{2}+1\right)\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2 + O(T^4)\right]$$

Damit $C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V$

$$= d\,\frac{\pi^2}{6}\,k_B \cdot N\,\frac{k_B T}{E_F} + \dots$$

spezifische Wärme des Fermi-Gases für $T \to 0$

Beitrag der Metall-Elektronen zur spez. Wärme von Festkörpern



$$C_V = \underbrace{c_1 T}_{\text{Elektronen}} + \underbrace{d_3 T^3}_{\text{Phononen}}, \quad T \to 0$$