11.1.

11.1.07

Zusammengesetzte Systeme

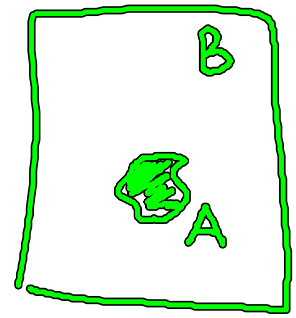
N Teilsystemen

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N$$

N-partite

Spezialfall: bipartite

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$



z.B. System und Bad

$|\psi\rangle$ WF des Gesamtsystems S

$$|\psi\rangle = \sum_{a,b} c_{ab} |a\rangle \otimes |b\rangle$$

$\{|a\rangle\}$ VOS in $\mathcal{H}_A$

$\{|b\rangle\}$ VOS in $\mathcal{H}_B$

Die Koeff. Matrix C, $(C)_{ab} = c_{ab}$

$$C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1N} \\ \vdots & & \\ c_{M1} & \cdots & c_{MN} \end{pmatrix}$$

$\dim \mathcal{H}_A = M$

$\dim \mathcal{H}_B = N$

rechteckige Matrix

Die reduzierte Dichtematrix

Interessieren uns für reduzierte Info, Erwartungswerte aller Observablen $\hat{A}$ des Systems A, aber nicht z.B.

$$\underbrace{\langle\hat{A}\rangle} = \langle\Psi|\hat{A}\otimes\mathbb{1}|\Psi\rangle =$$

$$= \sum_{aba'b'} c^*_{a'b'} c_{ab} \langle a'|\otimes\langle b'|\hat{A}\otimes\mathbb{1}\ |a\rangle\otimes|b\rangle$$

$$= \sum_{aba'b'} c^*_{ab} c_{a'b'} \langle a|\otimes\langle b|\ \hat{A}\otimes\mathbb{1}\,|a'\rangle\otimes|b'\rangle$$

$$\langle b|\mathbb{1}|b'\rangle = \delta_{bb'}$$

$$= \sum_{aba'} c^*_{ab} c_{a'b} \underbrace{\langle a|\hat{A}|a'\rangle}$$

$$= \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_A\hat{A},$$

$$\hat{\rho}_A = \sum_{aba'} c^*_{ab} c_{a'b} |a'\rangle\langle a|, \qquad =$$

denn $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_A\hat{A} = \sum_\alpha \langle\alpha|\hat{\rho}_A\hat{A}|\alpha\rangle$

$$= \sum_{\alpha aba'} c^*_{ab} c_{a'b} \underbrace{\langle\alpha|a'\rangle}_{\delta_{\alpha a'}} \langle a|\hat{A}|\alpha\rangle \quad a'$$

$$= \langle\hat{A}\rangle$$

$\hat{\rho}_A$ ist eine Dichtematrix im System A

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi| =$$

$$= \sum_{aba'b'} c^*_{ab} c_{a'b'} \underbrace{\mathrm{Tr}_B}\, |a'\rangle \underbrace{|b'\rangle\langle b|}\langle a|$$

$$\mathrm{Tr}_B |b'\rangle\langle b| = \delta_{bb'}$$

$$= \sum_{aba'} c^*_{ab} c_{a'b} |a'\rangle\langle a|$$

- Ausgehend vom reinen Systemzustand $|\psi\rangle$ erhalten wir durch Spurbildung über System B (Teilspur im System B) den reduzierten Dichteoperator des Systems A, $\hat{\rho}_A$
- Es gilt $\rho_A = \rho_A^\dagger$, $\mathrm{Tr}\,\rho_A = 1$, $\rho_A \geq 0$

Beispiel: klassische W-Verteilung (Dichte) mit zwei Variablen, a, b

$$p(a,b) : \int da\,db\; p(a,b) = 1$$

$$p_A(a) = \frac{\int db\; p(a,b)}{\text{Normierung}}$$

Damit alle Erwartungswerte für Funktionen $f(a)$ berechnen

reduzierte W-Dichte:

$$\langle f(a)\rangle = \int da\; f(a)\, p_A(a)$$

$$\hat{\rho}_A = \sum_{a b a'} c^*_{ab}\, c_{a'b}\, |a'\rangle\langle a| =$$

$$= \sum_{a a'} \left(c\, c^\dagger \right)_{a'a} \dots)$$

$\sum d_{ab} e_{bc}$ Matrixprodukts

wobei $(c^\dagger)_{ab} = c^*_{ba}$

$$c\, c^\dagger = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1N} \\ c_{n1} & & c_{nN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^*_{11} & c^*_{N1} \\ & \\ c^*_{1N} & c^*_{NN} \end{pmatrix}$$

System A | System B

Thermodyn.: „System" | „Bad"

QIT: Alice | Bob

$|\psi\rangle$ in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ heißen separabel (reine Tensoren), falls

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B\,,$$

andernfalls heißt $|\psi\rangle$ verschränkt.

Es gilt:

$|\psi\rangle$ separabel: $\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B\, |\phi\rangle_A |\phi'\rangle_B \; {}_B\langle\phi'|\; {}_A\langle\phi|$

$$\mathrm{Tr}_B\, |\phi'\rangle\langle\phi'| = \sum_b \langle b|\phi'\rangle\langle\phi'|b\rangle = \sum_b \langle\phi'|\underbrace{b\rangle\langle b}_{\mathbb{1}}|\phi'\rangle = \langle\phi'|\phi'\rangle = 1$$

$= |\phi\rangle_A \, {}_A\langle\phi|$: reiner Zustand, denn $\hat{\rho}_A^2 = \hat{\rho}_A$

Satz: $|\psi\rangle$ separabel $\Longrightarrow$ $\hat{\rho}_A$ rein

$\Longrightarrow$ $\hat{\rho}_B$ rein

(Bemerkung: $\hat{\rho}_B = \mathrm{Tr}_A\, |\psi\rangle\langle\psi| = \mathrm{Tr}_A\, |\phi\rangle_A |\phi'\rangle_B \; {}_B\langle\phi'|\; {}_A\langle\phi|$

$= |\phi'\rangle_B \; {}_B\langle\phi'|$) rein.

Satz: $|\psi\rangle$ verschränkt $\Longrightarrow$ $\hat{\rho}_A$ gemischt

$\hat{\rho}_A^2 \neq \hat{\rho}_A$, $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_A^2 < 1$.

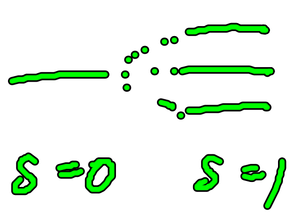
$\Longrightarrow$ $\hat{\rho}_B$ gemischt.

Beispiel: Zwei Spins

verschränkt

$S=0$	Singlet	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$	$S_z = 0$
$S=1$	Triplet	$|\uparrow\uparrow\rangle$	$S_z = 1$
		$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$	$S_z = 0$
		$|\downarrow\downarrow\rangle$	$S_z = -1$

separabel



1) $|\psi\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B$

$\hat\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B \, {}_B\langle\uparrow| \, {}_A\langle\uparrow| = |\uparrow\rangle_A \, {}_A\langle\uparrow|$

2) $|\psi\rangle = |S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $|\uparrow\rangle$ reiner Z. $|b\rangle$

$\hat\rho_A = \mathrm{Tr}_B \frac{1}{2}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|\right)$

$= \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \underbrace{-(-)}_{+} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

gemischt

Annahme: bipartites System

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

Zustand $|\psi\rangle = \sum_{ab} c_{ab} |a\rangle \otimes |b\rangle$ Doppelsumme

$\stackrel{?}{=} \sum_n \lambda_n |\alpha_n\rangle \otimes |\beta_n\rangle$ Einfachsumme

Schmidt-Zerlegung.

Def: Die Anzahl der von Null verschiedenen λ_n in der Schmidt-Zerl. von $|\psi\rangle$ heißt Schmidt-Zahl n_S. Für $n_S = 1$ ist der Zustand separabel, $n_S > 1$ ist er verschränkt.

Satz: Jedes $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ kann zerlegt werden als $\sum_n \lambda_n |\alpha_n\rangle \otimes |\beta_n\rangle$, $\lambda_n \geq 0$,

wobei $\{|\alpha_n\rangle\}$ VOS in $\mathcal{H}_A$ und $\{|\beta_n\rangle\}$ VOS in $\mathcal{H}_B$ sind.

<u>Beweis</u>: Für $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B$.

$$|\psi\rangle = \sum_{ab} \underbrace{c_{ab}}_{C \text{ Matrix}} |a\rangle \otimes |b\rangle$$

Singulärwertzerlegung: $C = UDV$

U, V unitär, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$; $\lambda_n \geq 0$

s. z.B. Nielsen/Chuang

$$|\alpha_n\rangle = \sum_a U_{an} |a\rangle$$

$$|\beta_n\rangle = \sum_b V_{nb} |b\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \sum_{abn} U_{an} D_{nn} V_{nb} |a\rangle \otimes |b\rangle =$$

$$= \sum_n \lambda_n |\alpha_n\rangle \otimes |\beta_n\rangle .$$

Diskussion:

- Singulärwertzerlegung allgemeiner als Spektralzerl.
- geht auch für rechteckige Matrizen

$\Rightarrow$ einige der λ_n s sind Null.

$\Rightarrow$ Folgerung für reduzierte Dichtematrizen:

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_n \lambda_n^2 |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$$

Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 1/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Aus $\hat{\rho}_A$ und $\hat{\rho}_B$ können wir $|\psi\rangle$ nicht (genau) rekonstruieren

Warum: $|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n |\alpha_n\rangle \otimes |\beta_n\rangle$

— $\rho_A = \sum_n \lambda_n^2 |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$

— $\rho_B = \sum_n \lambda_n^2 |\beta_n\rangle\langle\beta_n|$

$|\alpha_n\rangle \rightarrow (e^{i\varphi_\lambda})|\alpha_n\rangle$ ⚠

- von-Neumann-Entropie $S_A = -k_B \mathrm{Tr}_A\, \rho_A \ln \rho_A$

$$= -k_B \sum_n \lambda_n^2 \ln \lambda_n^2$$

separabel: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{n+1} = 0 \Rightarrow S_A = 0$

verschränkt: $S_A > 0$.