Vortrag „Unternehmen Risiko,
Risiko Unternehmen"

Do 25.01.07 $16^{00} - 17^{30}$

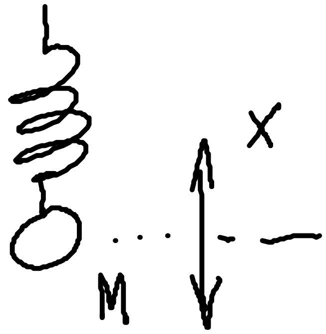
MA 415

Dr. D. Woywod
McKinsey

Quanten - Dissipation

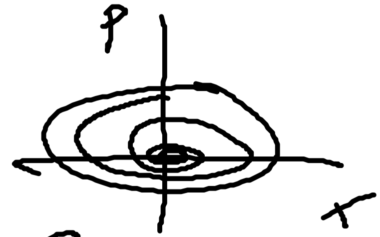
Klassische Mechanik: Beschreibung
von Dissipation durch „Reibungsterme"

in der Bewegungsgleichungen



$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

harm. Oszillator



$$\| \quad \underline{\ddot{x}} + \gamma \dot{x} + \underline{\omega^2 x} = f(t) \quad \|$$

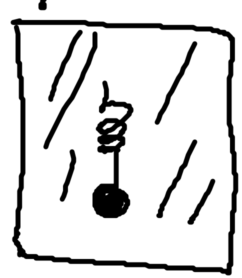
gedämpfter HO.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Mikroskopische Theorie
für Reibungsterm $\gamma \dot{x}$ möglich?

Ursprung von Reibung mittels System-Bad Theorie erklären:

Schritt 1: „Welt" aufteilen in System „und Bad



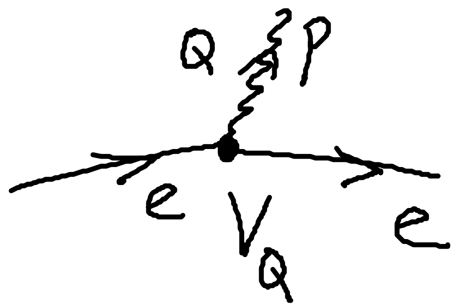
Schritt 2: Wechselwirkung zwischen System und Bad identifizieren und dann modellieren.

Beispiel: • Elektron-Phonon Wechselwirkungen in einem Festkörper

(→ sorgt für elektr. Widerstand bei hohen Temperaturen)

System: Elektronen

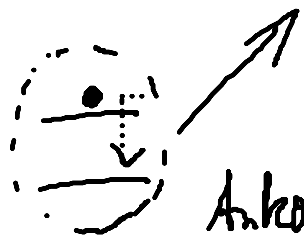
Bad: Phononen



• Spontane Emission von Licht aus einem angeregten Atom

Einstein '17

Einstein A, B Koeffizienten



$$\Longrightarrow \frac{1}{e^{\beta E}-1}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

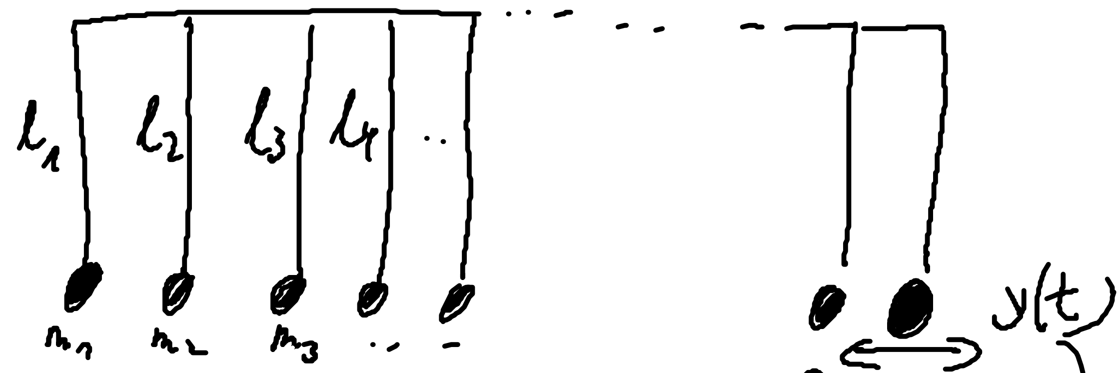
Ankopplung an das elektromagnetische Feld.

• Wie funktioniert ein Laser?

• Qubit: wie groß ist die „Operationszeit",

" " „Dekohärenzzeit"

Beispiel:

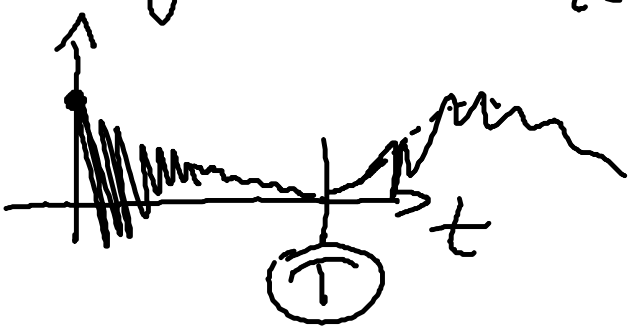


System mit (im Rahmen der Theorie kleiner Schwingungen)
N Freiheitsgraden
große Anzahl von Eigenfrequenzen ω_i

Bewegung $$y(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

Amplituden

Phasen



Formale Aufspaltung in System und Bad

In der mikroskopischen Theorie

Hamiltonian: $$\hat{H} = \underbrace{\hat{H}_S}_{\text{System}} + \underbrace{\hat{H}_B}_{\text{Bad}} + \underbrace{\hat{H}_{SB}}_{\text{System-Bad-Wechselwirkung}}$$

Hilbertraum $$\mathcal{H}_{total} = \mathcal{H}_{System} \otimes \mathcal{H}_{Bad}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{S,B} \boxed{c_{SB}}\, |S\rangle \otimes |B\rangle$$

Jetzt interessieren wir uns nur für das System

$$\Longrightarrow \quad \hat{\rho}_S = \mathrm{Tr}_B \, |\Psi\rangle\langle\Psi|$$ reduzierte Dichte-matrix

Literatur: H. Carmichael, „Quantum Optics" (Springer)

Zeitentwicklung des reduzierten Dichteoperators

Ausgangspunkt $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 + V, \quad \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_B$

Störanteil $V \equiv \mathcal{H}_{SB}$

Definition $\chi(t)$ Dichtematrix des Gesamtsystems

Liouville-von-Neumann-Gleichung $i \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = [\mathcal{H}, \chi(t)]$

$$\Longrightarrow \quad \chi(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \chi(t=0) \, e^{i\mathcal{H}t}$$ formale Lösung

Jetzt Übergang in das Wechselwirkungsbild

Observable A: $\quad \tilde{A}(t) \equiv e^{i\mathcal{H}_0 t} A \, e^{-i\mathcal{H}_0 t}$

Zustand χ: $\quad \tilde{\chi}(t) \equiv e^{i\mathcal{H}_0 t} \chi(t) \, e^{-i\mathcal{H}_0 t}$.

Bew. gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi}(t) = i \mathcal{H}_0 \tilde{\chi} - i \tilde{\chi} \mathcal{H}_0 + e^{i\mathcal{H}_0 t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \chi(t)\right] e^{-i\mathcal{H}_0 t}$$

$$= i\left[H_0, \tilde{x}(t)\right] - i\, e^{iH_0 t}\left[H, \tilde{x}(t)\right] e^{-iH_0 t}$$

$$= \cancel{i\left[H_0, \tilde{x}(t)\right]} - i\, e^{iH_0 t}\left[\cancel{H_0} + \underline{\underline{V}}, \tilde{x}(t)\right] e^{-iH_0 t}$$

$$e^{iH_0 t} H_0 e^{-iH_0 t} = H_0$$

$$e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} = \tilde{V}(t)$$

$$= \underline{-i\left[\tilde{V}(t), \tilde{x}(t)\right]}$$

Deshalb

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{x}(t) = -i\left[\tilde{V}(t), \tilde{x}(t)\right]$$

L. v. Neumann-Gl. im
WW-Bild

Umformung der Dgl. 1. Ordnung in
Integralgleichung

$$\underline{\tilde{x}(t)} = \underbrace{\tilde{x}(t=0)}_{x(t=0)_{(t)} := \text{ Anfangsbed.}} - i\int_0^t dt' \left[\tilde{V}(t'), \underline{\tilde{x}(t')}\right]$$

$$= x(t=0) - i\int_0^{t} dt' \left[\tilde{V}(t'), \underline{x(t=0)} - i\int_0^{t'} dt'' \left[\tilde{V}(t''), \tilde{x}(t'')\right]\right]$$

$\frac{\partial}{\partial t} /$: $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\chi}(t) = -i\left[\tilde{V}(t), \chi(0)\right] - \int_0^t ds \left[\tilde{V}(t), \left[\tilde{V}(s), \tilde{\chi}(s)\right]\right]$

Reduzierte Dichtematrix : $\rho(t) = \mathrm{Tr}_B\, \chi(t)$

Nimm Spur dieser Gleichung über B

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Tr}_B\, \tilde{\chi}(t) =$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}(t) = -i\,\mathrm{Tr}_B\left[\tilde{V}(t), \chi(0)\right] - \int_0^t dt'\, \mathrm{Tr}_B \underbrace{\left[\tilde{V}(t), \left[\tilde{V}(s), \tilde{\chi}(s)\right]\right]}_{\text{Doppel-Kommutator}}$$

Bemerkungen : • Es gilt $\tilde{\rho}(t) = \mathrm{Tr}_B\, \tilde{\chi}(t)$ auch im WW-Bild

• Erwartungswerte von Systemoperatoren A_S

(Aufgabe) $\langle A_S \rangle_t = \mathrm{Tr}_S\left[\tilde{\rho}(t)\tilde{A}_S(t)\right]$

Vereinfachte Ausdrücke, Ratengleichungen

1) Betrachte nur Diagonalelemente der reduzierten Dichtematrix ρ

$$P_m(t) \equiv \langle m|\rho(t)|m\rangle$$

interpretiere diese als Wahrscheinlichkeiten für den Zustand $|m\rangle$

2) Näherungen in der exakten Gleichung führen auf die sogenannte Ratengleichung

$$\boxed{\dot{P}_m(t) = \sum_n \underbrace{\Gamma_{m\leftarrow n}} P_n(t) - \Gamma_{n\leftarrow m} P_m(t)}$$

Übergangsrate