

18.1.

Heute 16¹⁵ Kolloquium PN 202 (1)

T. Brandes: Quantenmechanischer Transport -
Rauschen, Dissipation und
Wechselwirkungen



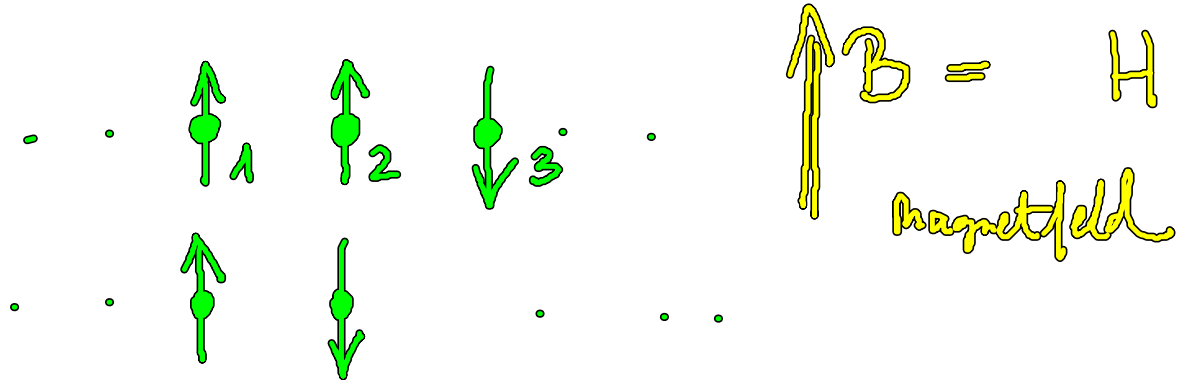
18.1.07

Magnetismus : Ising - Modell

"Spins" mit zwei Einstellmöglichkeiten

↑ in z-Richtung, ↓ in z-Richtungen

litter, auf jeden Gitterplatz sitzt ein Spin



Spinvariablen

$$\sigma_i = \pm 1$$

\hookrightarrow Index für Gitterplatz, $i=1, \dots, N$

Eigenwerte der Spinmatrix $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Hamiltonian: zwei Anteile

- WW der Spins untereinander
- " " " mit dem Magnetfeld am Gitterplatz i .

$$\hat{H} = \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - g \mu_B \sum_i \sigma_i h_i$$

\uparrow Austauschintegrale \uparrow Landé-Faktor \uparrow Magnetfeld an Platz i
 \uparrow Bohr-Magneton

Beachte: Das Magnetfeld h_i ist von außen vorgegeben.

Im folgenden $g \mu_B = 1$

$$\Rightarrow \hat{H} = - \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i=1}^N \sigma_i h_i$$

- i. A. schwierig bis auf den Fall $J_{ij} = 0$
(dann hat man WW-freie Spins)

Kanonische Zustandssumme

$$e^{-\beta F} = Z = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \sum_{\sigma_2 = \pm 1} \dots \sum_{\sigma_N = \pm 1} e^{-\beta \hat{H}}$$

$$= \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \dots \sum_{\sigma_N = \pm 1} e^{-\beta \left[-\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i \right]}$$

Spezialfall $J_{ij} = 0$

$$\Rightarrow e^{-\beta F_{\text{fre}}} = Z_{\text{fre}} = \sum_{\sigma_1} \dots \sum_{\sigma_N} e^{+\beta \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i}$$

$$= \sum_{\sigma_1} \dots \sum_{\sigma_N} e^{\beta (h_1 \sigma_1 + h_2 \sigma_2 + \dots + h_N \sigma_N)}$$

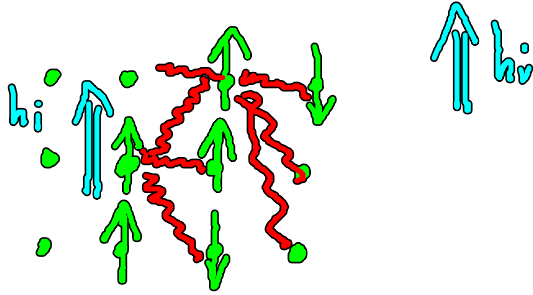
$$= \sum_{\sigma_1 = \pm 1} e^{\beta h_1 \sigma_1} \times \dots \times e^{\beta h_N \sigma_N}$$

$$= \sum_{\sigma_1 = \pm 1} e^{\beta h_1 \sigma_1} \sum_{\sigma_2} e^{\beta h_2 \sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N = \pm 1} e^{\beta h_N \sigma_N}$$

$$= \underbrace{2 \cosh \beta h_1}_N \times \dots \times 2 \cosh \beta h_N$$

$$= \prod_{i=1}^N Z_i(h_i); \quad Z_i(h_i) = 2 \cosh \beta h_i$$

Näherungsmethoden: Mean-Field-Methode
 Weiss'sche Molekularfeldnäherung



Effekt der Spin-Spin-Wechselwirkungen
 als effektives Magnetfeld beschreiben:

$$-\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad -\sum_i h_i \sigma_i$$

$\left[\sum_{i=1}^N J_{ij} \sigma_i \stackrel{!}{=} h_{eff,j} \text{ festhalten} \right]$

$$\hat{H} = -\sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i$$

$$= - \sum_i h_i [\sigma] \sigma_i \quad \text{zusätzliches Magnetfeld}$$

$$h_i[\sigma] \equiv h_i + \sum_{j=1}^N J_{ij} \langle \sigma_j \rangle$$

↑ äußeres Feld

$$+ \sum_{j=1}^N J_{ij} (\sigma_j - \langle \sigma_j \rangle)$$

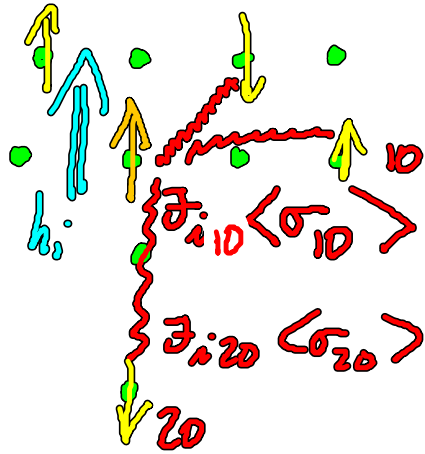
Abweichung von Mittelwert

vernachlässigen!

Damit Mean-Field Hamiltonian

$$\mathcal{H}^{\text{MF}} \equiv - \sum_{i=1}^N h_i^{\text{eff}} \sigma_i, \quad h_i^{\text{eff}} \equiv h_i + \sum_j J_{ij} \langle \sigma_j \rangle$$

das mittlere, durch alle anderen spins an der Stelle i erzeugte Magnetfeld



$$h_i^{\text{eff}} = h_i + \sum_j J_{ij} \langle \sigma_j \rangle$$

$$H^{\text{HF}} = - \sum h_i^{\text{eff}} \sigma_i \quad \text{linear in } \sigma_i$$

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \dots \sum_{\sigma_N = \pm 1} \sigma_j e^{-\beta H^{\text{HF}}[\{\sigma_j\}]}$$

Jetzt Spezialfall $h_i = h$ äußeres Magnetfeld

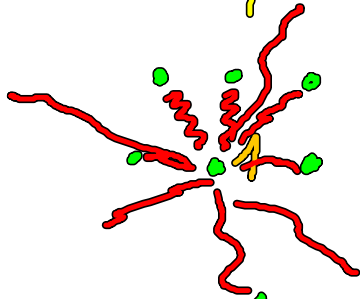
$$\langle \sigma_j \rangle = m_j = m \quad \text{Magnetisierung}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \textcircled{m} = \langle \sigma_i \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\sigma_1} \dots \sum_{\sigma_N} \sigma_i e^{+\beta \sum_i h_i \sigma_i} \\ &= \frac{\sum_{\sigma_1} e^{\beta h_1 \sigma_1} \sum_{\sigma_2} e^{\beta h_2 \sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N} e^{\beta h_N \sigma_N}}{\sum_{\sigma_1} e^{\beta h_1 \sigma_1} \sum_{\sigma_2} e^{\beta h_2 \sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N} e^{\beta h_N \sigma_N}} \\ &= \frac{2 \sinh \beta h^{\text{eff}}}{2 \cosh \beta h^{\text{eff}}} = \tanh \left[\beta \left(h + \sum_j J_{ij} \textcircled{m} \right) \right] \end{aligned}$$

Selbstkonsistenzgleichung

$$m = \tanh\left[\beta\left(h + \sum_j J_{ij} m_j\right)\right]$$
$$= \tanh[\beta(h + \mathcal{F}m)] = \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} = \sum_j J_{ij}$$



Diskussion der Selbstkonsistenzgleichung für $h=0$
(kein äußeres Magnetfeld)

Fall 1: $\mathcal{F} = 0$ (keine w)

Aus $m = \tanh \beta \mathcal{F} m$ folgt $m = 0$
 \Rightarrow keine Magnetisierung, wie erwartet.

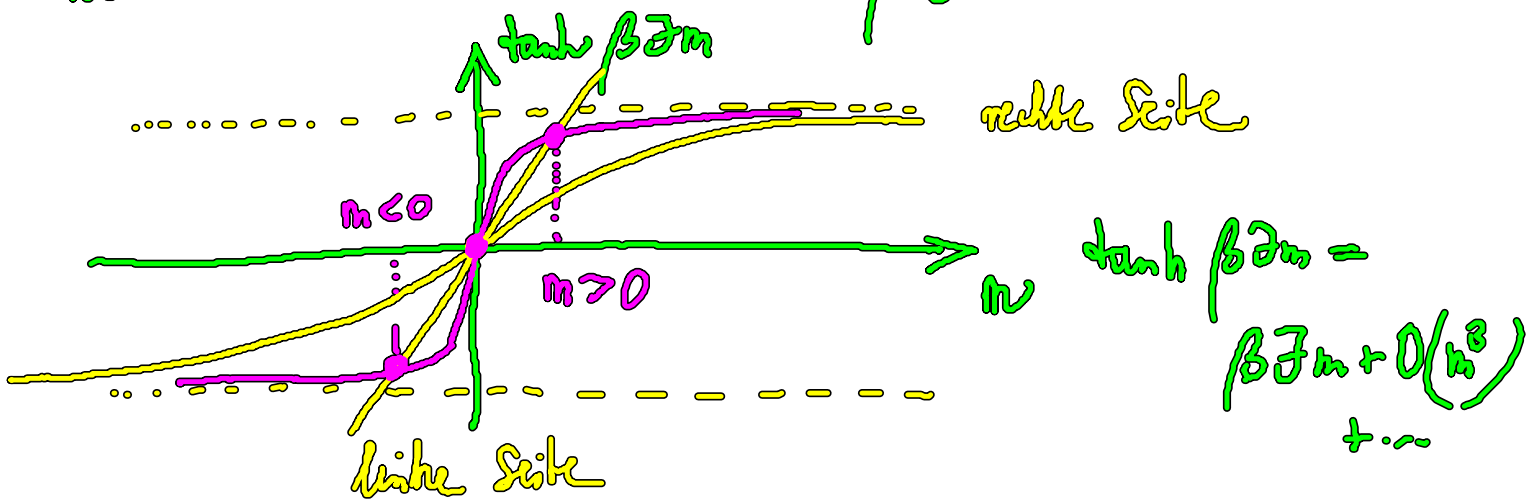
Auch aus $e^{-\beta F_{\text{free}}} = \prod_{i=1}^N 2 \cosh \beta h_i$

$$\Rightarrow m_i = - \frac{\partial F_{\text{me}}}{\partial h_i} \Big|_{h_i=0} = \tanh(\beta h_i) \Big|_{h_i=0} \quad (\text{Paramagnets})$$

für $h_i=0$ wieder $m_i=0$, d.h. nichts passiert.

Fall $Z > 0$ (mit Wechselwirkungen).

Betrachten $m = \tanh(\beta Z m)$



- : nur $m=0$ ist eine Lösung
- : 3 Lösungen $m=0, m_{\pm}$ mit $|m_{\pm}| \neq 0$

Lösung $m_{\pm} \neq 0$ beschreiben eine endliche Magnetisierung selbst bei äußerem Magnetfeld $h=0$ "spontane Magnetisierung".

Wann passiert das? Für $\beta Z > 1 = \beta_c Z$ passiert der Übergang, d.h. für

$$\frac{k_B T}{J} < \frac{k_B T_c}{J} = 1$$

• kritische Temperatur $k_B T_c = J$

Für $T < T_c$: spontane Magnetisierung

Für $T > T_c$: keine spontane "