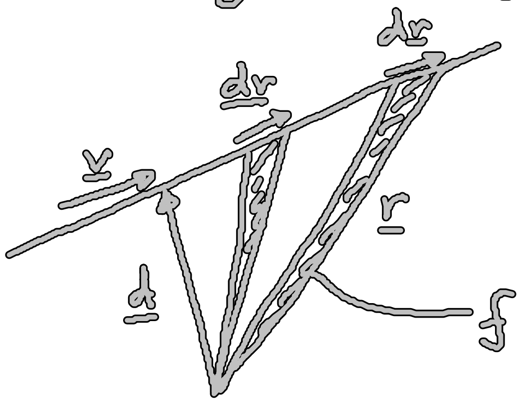
• Flächensatz gilt insbes. für gleichförmige Bewegung



$$\underline{r} = \underline{d} + \underline{v}t$$

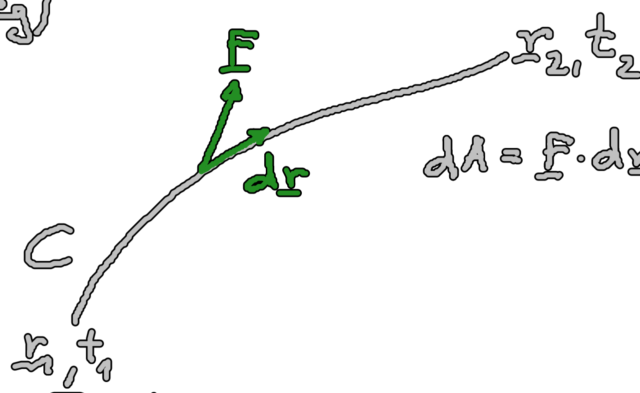
$$f \sim |\underline{r} \times d\underline{r}| = |(\underline{d} + \underline{v}t) \times \underline{v}dt|$$

$$= |\underline{d} \times \underline{v}dt|, \text{ unabh. von } t!$$

$$= \text{Seitenlänge} \times \text{Höhe}$$

2.4. Energieerhaltung

a) Arbeit (Kraft × Weg)



$$dA = \underline{F} \cdot d\underline{r} \quad (2.12)$$

• Def:

$$A_{12}(C) = \int_{\underline{r}_1, C}^{\underline{r}_2} dA = \int_{\underline{r}_1, C}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \cdot d\underline{r}$$

$$= \int_{t_1, C}^{t_2} \underline{F}(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t), t) \cdot \dot{\underline{r}}(t)\, dt \quad (2.13)$$

... Arbeit, die Kraftfeld $\underline{F}$ am Massepkt. verrichtet, wenn er sich von $\underline{r}_1$ nach $\underline{r}_2$ bewegt.

• Einheit: $[A_{12}] = \text{Joule} = J = Nm$

• Def: Leistung = geleistete Arbeit pro Zeiteinheit:

$$N = \frac{dA}{dt} = \underline{F} \cdot \dot{\underline{r}} \quad (2.14)$$

b) Kinetische Energie & Kräfte

- 2. Newton $\cdot \dot{\underline{r}} \longrightarrow m\, \ddot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} = \underline{F} \cdot \dot{\underline{r}}$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m \dot{\underline{r}}^2}{2}\right) = \underline{F} \cdot \dot{\underline{r}} = N} \quad (2.15)$$

- Leistung ändert $\dot{\underline{r}}$!

  Def. $\boxed{\text{kinetische Energie: } T = \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2}$ (2.16)

- Integriere: $\int_{t_1}^{t_2} (2.15)\, dt \longrightarrow \boxed{T(t_2) - T(t_1) \underset{(2.13)}{=} A_{12}(C)}$ (2.17)

  ... verrichtete Arbeit geht in kinet. Energie!

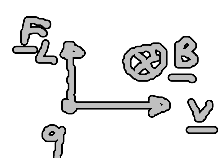
- Zerlege: $\boxed{\underline{F} = \underbrace{\underline{F}_{kons}}_{\text{konservative}} + \underbrace{\underline{F}_{diss}}_{\text{dissipative Kraft}}}$ (2.18)

  dissipative Kraft (Reibungs-) erzeugen Wärme $\longrightarrow$ mechan. Energie geht verloren

c) konservative Kräfte

$\boxed{\text{ändern die Gesamtenergie (mechanische) des Massepkts. nicht.}}$

- Spezialfall: Lorentz-Kraft $\underline{F}_L = \frac{q}{c}(\underline{v} \times \underline{B})$



  $\underline{F}_L \perp \underline{v} \xrightarrow[(2.15)]{} N = 0 \longrightarrow T = \text{konst.}$ (2.19)

- konservative Kraft im engeren Sinne:

  Def. $\underline{F}_{kons}$ besitzt ein Potential $U(\underline{r})$, so daß gilt:

$$\boxed{\underline{F}_{kons} = -\operatorname{grad} U(\underline{r})} \quad (2.20)$$

(keine Abh. von $\dot{\underline{r}}, t$)

[Erinnerung: $dU = \mathrm{grad}\, U \cdot d\underline{r} = \underline{\nabla} U(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$

Nabla-Operator

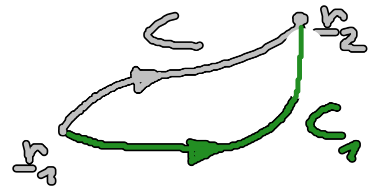
kartes. Koordinaten: $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$

$$\mathrm{grad}\, U = \underline{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \underline{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \underline{e}_z$$

$\underline{\nabla} U \perp$ Äquipotentiallinien: $U(\underline{r}) =$ konst.]

· Bemerkungen:

(i) verrichtete Arbeit von $\underline{F}_{kons}$:



$$A_{12}(C) = \int \underline{F}_{kons} \cdot d\underline{r}$$

$$\overset{(2.20)}{=} -\int_C \mathrm{grad}\, U \cdot d\underline{r} = -\int_C dU$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{A_{12}(C) = -[U(\underline{r}_2) - U(\underline{r}_1)]} \quad (2.21)$$

→ Arbeit ist unabhängig vom Weg in konservativen Kraftfeldern!

→ geschlossene Wege: $\bigcirc$ = "$C - C_1$"

$$\boxed{A(\circlearrowleft) = 0} \quad (2.22)$$

(ii) Existenz eines Potentials: (vgl. MMP Kap 6.6)

$$\boxed{\mathrm{rot}\, \underline{F} = 0 \xLeftrightarrow[\text{dann"}]{\text{"genau}} \underline{F} = -\mathrm{grad}\, U(\underline{r})} \quad (2.23)$$

im einfach zusammenhängenden Gebiet

[Erinnerung: $\text{rot}\,\underline{F} = \underline{\nabla} \times \underline{F}$ $\quad {}^{i,j,k=}_{x,y,z}$

kartesische Kord. $(\underline{\nabla} \times \underline{F})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k$]

Beweis: $(\longrightarrow)$ Satz von Stokes & weitere Überlegungen

$(\longleftarrow)$ $[\underline{\nabla} \times \underline{F}]_i = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} U(\underline{r}) = 0\,!$

d) Energieerhaltung

- Verwende: $\underline{F}_{kons} \cdot \dot{\underline{r}} = -\text{grad}\,U \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = -\frac{dU(\underline{r})}{dt}$ (2.24)

in (2.15)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\underline{r}}^2}{2}\right) = \underline{F} \cdot \dot{\underline{r}}$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{\underline{r}}^2}{2} + U(\underline{r})\right] = \underline{F}_{diss} \cdot \dot{\underline{r}}} \quad (2.25)$$

- nur konservative Kräfte ($\underline{F}_{diss} = 0$):

(2.25): $\frac{d}{dt} \ldots = 0$ $\quad \boxed{\frac{m\dot{\underline{r}}^2}{2} + U(\underline{r}) = E = \text{konst.}}$ (2.26)

... Energieerhaltungssatz

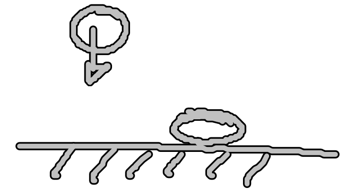
<u>Def</u>: $\boxed{\begin{array}{l} U(\underline{r}) \ldots \text{potentielle Energie} \\ E \ldots \text{Gesamtenergie} \end{array}}$ (2.27)

„konservativ" ... Energieerhaltend $\quad$ <u>Bsp</u>: fallendes Objekt

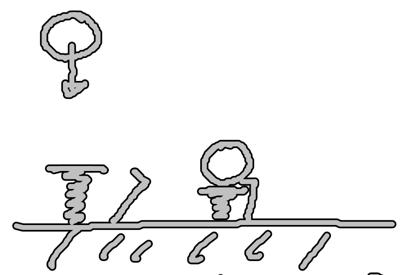
- $\underline{F}_{diss} \neq 0$

mechan. Energie (T+U) → Umwandlung in Wärmeenergie (Bsp: Reibung) „Dissipation"

Bsp:



→ Austausch mit Umgebung durch (zeitabh.) Kräften



Abgabe von E=T+U an Feder!

- <u>Schlußbemerkung</u>

$m\underline{\ddot{r}} = \underline{F}$ ... Dgl. 2. Ordnung in t

↓

Erhaltungssätze: $E(r,\dot{r})$, $\underline{p}$, $\underline{L}$ ... Dgl. 1. Ordnung in t

→ <u>erste Integrale der Bewegung</u>

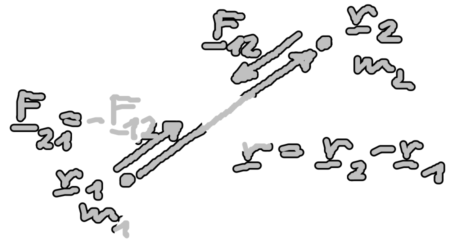
- Anwendung: Trifft Meteor die Erde? nur mit EES L = konst. lösbar

→ Übungen

3. <u>Katalog der Kräfte</u>

3.1. <u>Konservativen Kräfte</u>

a) Newtonsche Gravitationskraft



$$\boxed{\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \underbrace{\frac{\underline{r}}{r}}_{\underline{e}_r}} \quad (3.1)$$

- Gravitationskonstante: $\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$
- Fernwirkungsstandpkt
- Anwendung: Keplerproblem

• $U(\underline{r})$? Trick: $\underline{\nabla} U(r) = \frac{\partial U}{\partial r} \underline{\nabla} r = \frac{\partial U}{\partial r} \underline{e}_r$ (3.2)

$$\underline{\nabla} r = \underline{e}_r = \underline{\nabla} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\underline{r}}{r}$$

$\underline{F}_{12} = -\operatorname{grad} U(\underline{r})$!

$$\longrightarrow \quad \boxed{U(\underline{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}} \quad (3.3)$$

... weitreichende Wechselwirkung

$$U(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^n}, \quad n = 1!$$

• Feld-/Nahwirkungsstandpkt:

Gravitationspotential, von m_1 erzeugt: $\varphi(\underline{r}) = -\gamma \frac{m_1}{r}$ (3.4)

pot. Energie von m_2 in $\varphi(\underline{r})$: $U(\underline{r}) = m_2 \varphi(\underline{r})$ (3.5)

$$\underbrace{\underline{F}_{12} = -m_2 \operatorname{grad} \varphi(\underline{r}) \quad (3.6)}_{\text{„Nahwirkungsstandpkt"}}$$

ART: m_1 bewegen $\longrightarrow$ Gravitationswellen in $\varphi(\underline{r}, t)$ = Wellen in der Raumzeit