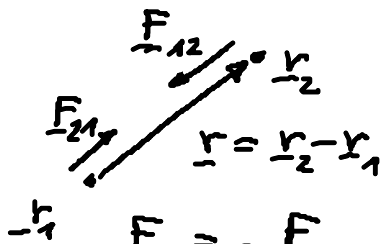
• schaue nach: komplexe Zahlen

3.1 Konservative Kräfte

a) Newtonsche Gravitationskraft

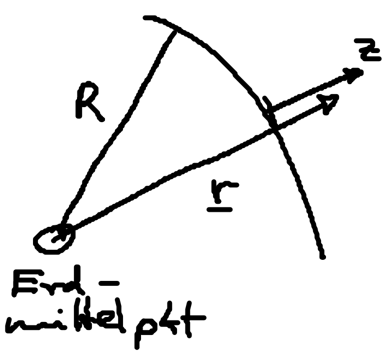


$$\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} = -\operatorname{grad} U(\underline{r}) \quad (3.1)$$

$$U(\underline{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad (3.3)$$

$$\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$$

b) Schwer-/Gewichtskraft



$$|\underline{r}| = r = R + z \quad , \quad z \ll R$$

$$\longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{R+z} = \frac{1}{R} \underbrace{\frac{1}{1+\frac{z}{R}}} \simeq \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} z \quad (3.7)$$

Merke $\simeq 1 - \frac{z}{R}$, $\frac{z}{R} \ll 1$ (Taylor!)

Erdmasse M, Probemasse m

$$\longrightarrow \text{pot. Energie: } \tilde{U}(z) = U(R+z) - U(R) \overset{(3.3)}{\underset{(3.7)}{=}} \gamma \frac{M}{R^2} m z$$

$$\longrightarrow \boxed{\tilde{U}(z) = mgz} \, , \quad \text{Fallbeschleunigung: } \boxed{g = \gamma \frac{M}{R^2}} \quad (3.8)$$

$= 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ (Erde)

$\longrightarrow$ Gewichtskraft: von m

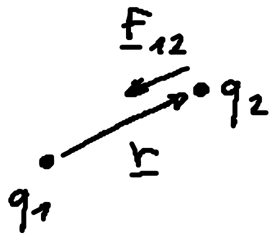
$$\boxed{\begin{aligned} \underline{G} &= -\operatorname{grad} \tilde{U} \\ &= -mg\,\underline{e}_z \end{aligned}} \quad (3.9)$$

· Achtung! Erde ist ausgedehnt

$$U(\underline{r}) = -\gamma m \int_{\text{Erde}} \frac{dM'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad dM' = \rho\, d^3r'$$

$$\overset{\text{o.B.}}{=} -\gamma \frac{mM}{r}$$

c) Coulombsches Kraftgesetz



elektrostatisches Potential:

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r} \quad (3.10)$$

Energie: $$U(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad (3.11)$$

$$\underline{F}_{12} = -\operatorname{grad} U(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} \quad (3.12)$$

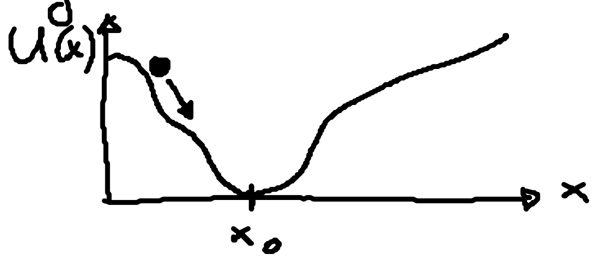
ε_0 ... Dielektrizitätskonst. des Vakuums

$q_1 q_2 \begin{cases} >0 & \text{... abstoßend} \\ <0 & \text{... anziehend} \end{cases}$

cgs-Einheiten: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to 1$

d) harmonische Kraft

· allg. 1D-Potential:



Ort x_0:

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_0} &= U'(x_0) = 0 \text{ ... keine Kraft} \\ U''(x_0) &= k > 0 \text{ .. Minimum, stabile Gleichgewichtslage} \end{aligned}\right\} (3.13)$$

· $U(x)$ in Umgebung von x_0:

Taylor-Entwicklung: $$U(x) = U(x_0) + \underbrace{U'(x_0)}_{=0\,(\text{s.o.})}(x-x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{U''(x_0)}_{k>0}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\longrightarrow \tilde{U}(y) = U(x) - U(x_0) = \frac{1}{2}ky^2 + O(y^3) \qquad y = x - x_0$$

$$\left.\begin{aligned} &\longrightarrow \text{harmonisches / Feder-Potential: } && \boxed{\tilde{U}(y) = \frac{1}{2}ky^2} \\ &\quad\ \text{harmonische / lineare Kraft: } && \boxed{F = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = -ky} \end{aligned}\right\} (3.14)$$

→ viele Potentiale sind lokal harmonisch!

e) Kernkraft: zwischen Nukleonen (Neutronen, Protonen)

Yukawa Potential $\boxed{U(\underline{r}) = -g^2 \frac{e^{-r/r_0}}{r}}$ (3.15)

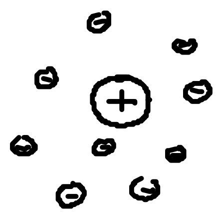
e^{-r/r_0} → endliche Reichweite r_0 der Ww
(„abgeschirmtes Coulombpotential")

g^2 ... Kopplungskonstante

$r_0 = \frac{h}{m_0 c}$ ... „Comptonwellenlänge" der Austauschteilchen (Pionen) mit Masse m_0

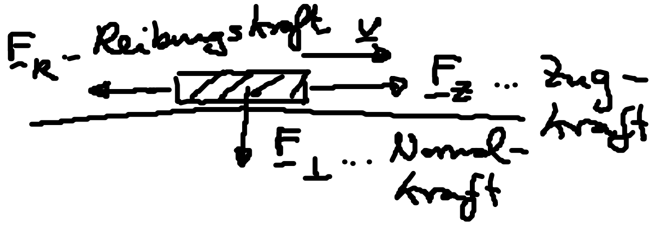
(h: Plancksches Wirkungsquantum)

- Anwendung in kond. Materie:
  Plastikkügelchen
  (Mikrometer groß)



3.2 Reibungs-/dissipative Kräfte [kein $U(\underline{r})$]

a) Haft- und Gleitreibung: (Coulombsches Reib. gesetz)



$$\underline{F}_R = -\underline{F}_Z \quad (3.16)$$

Haftreibungskraft

Ruhe falls $|\underline{F}_Z| < \mu_H |\underline{F}_\perp|$

μ_H ... Haftreibungskoeffizient

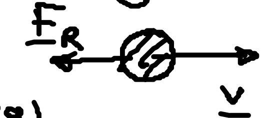
Gleitreibung

$$\underline{F}_R = -\mu_G |\underline{F}_\perp| \frac{\underline{v}}{v}, \quad 0<\mu_G<\mu_H$$

μ_G .. Gleitreibungskoeffizient

b) Stokessche Reibung in Flüssigkeiten/Gasen ohne Turbulenz

$$\boxed{\underline{F}_R = -\beta \underline{v} + O(v^2)} \quad (3.19)$$



Kugel: $\beta = 6\pi\eta a$ ← Kugelradius

η: Viskosität der umgebenden Flüssigkeit

c) Newtonsche Reibung: mit Turbulenz

$$\boxed{\underline{F}_R = -\gamma v^2 \frac{\underline{v}}{v} + O(v^3)} \quad (3.20)$$

Bsp: Auto, c_w-Wert

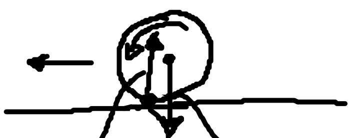
$$c_w = \frac{\gamma}{\varrho A_R}$$

ϱ: Dichte des Mediums

A_R: angeströmte Fläche

a)-c) z.Teil, phänomenologische Gesetze, aber auch herleitbar für Spezialfälle

d) Rollreibung



$\underline{K}_N$, $\underline{G}$ ... nicht auf einer Linie → bremsenden Drehmoment

$\underline{G}$ ... Gewichtskraft

$\underline{K}_N$ ... von Unterlage

Auflagepkt.

3.3 Scheinkräfte

· im Nicht-IS [später!]: $m\underline{a} = \underline{F} + \underline{F}_{schein}$

wegen Nicht-IS, damit Newton II formal gilt, keine wirkl. physikal. Kräfte, Auswirkungen real:

Bsp: anfahrendes Auto: „Kraft", die Fahrer in Sessel drückt

Karussell: Zentrifugalkraft, die Person nach außen drückt

Erde: Corioliskraft

4. Eindimensionale / lineare Bewegung

4.1. Allg. Problem

• 2. Newt. Axiom: $m\ddot{x} = F(x,\dot{x},t)$ (4.1) ... gewöhnl. Dgl. 2. Ordnung ist

$\longrightarrow$ $x(t)$ mit 2 Integrationskonst.

α) Randbed.: $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$

β) Anfangsbed. $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$

4.2. Bewegung im kons. Kraftfeld

• mit grad $\rightarrow \frac{d}{dx}$: $F(x) = -\frac{d}{dx}U(x) = -U'(x) \longrightarrow \boxed{m\ddot{x} = -U'(x)}$ (4.2)

pot. Energie in 1D

• Lösungsmethoden: α) spezieller Ansatz

β) 1. Integral der Bewgl. (4.2) $\longrightarrow$ EES

2. Integral: „Separation der Variablen"

$\longrightarrow$ Bahnkurve

• zu β): 1. Integral: $\dot{x}\cdot(4.2) \longrightarrow \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\dot{x}^2 = -\frac{d}{dt}U(x(t))$

$\longrightarrow$ EES: $\boxed{\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E}$ (4.3)

Gesamtenergie: 1. Integrationsvariable

2. Integral:

mit $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ (4.3) $\longrightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}$

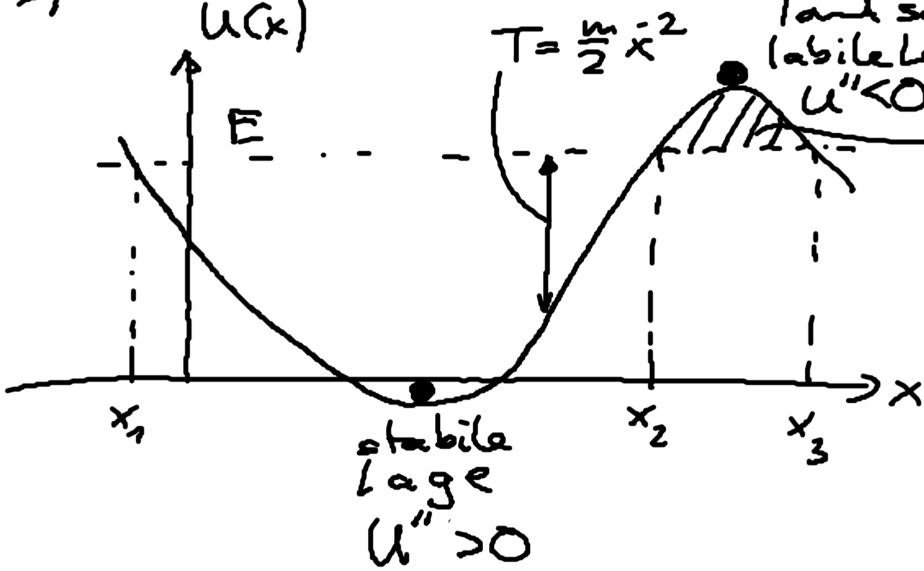
$\longrightarrow dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$

$\int_{t_0}^{t} dt'$ $\longrightarrow$ $\boxed{t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}}$ (4.4) $x_0 = x(t_0)$ ... 2. Integrat. variable

$\longrightarrow$ $\boxed{x = x(t-t_0, x_0, E)}$ (4.5)

[i.f. o.B.d.A.: $t_0 = 0$]

• qualitative Diskussion: „Teilchen bewegt sich in Potential-landschaft"



• $x_1, x_2, x_3 \ldots$ Umkehrpunkte ($\dot{x} = 0$)

• period. Bew. $x_1 \leq x \leq x_2$

Periodendauer

$$\boxed{T \underset{(4.4)}{=} 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}}} \quad (4.6)$$