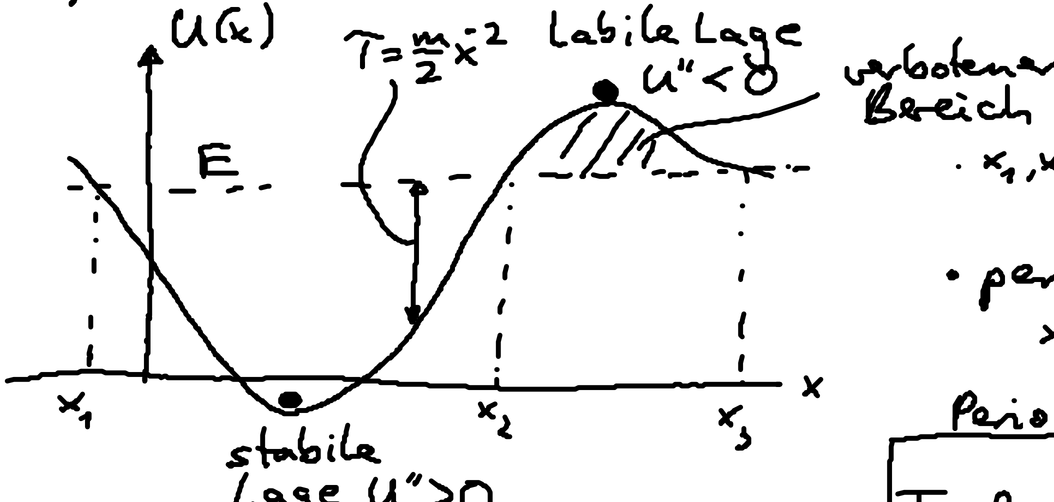
4.2 Bewegung im kons. Kraftfeld

- $$\boxed{m\ddot{x} = -U'(x)} \quad (4.2)$$

$$\boxed{\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E} \quad (4.3)$$

$$\boxed{t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}} \quad (4.4)$$

- qualitative Diskussion

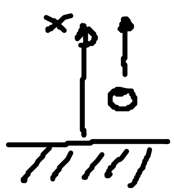


- x_1, x_2, x_3 … Umkehrpkte $\dot{x} = 0$!
- periodische Bewegung $x_1 \leq x \leq x_2$

Periodendauer:

$$\boxed{T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}}} \quad (4.6)$$

a) Senkrechte Wurf bei konst. Gewichtskraft



$$m\ddot{x} = -mg$$

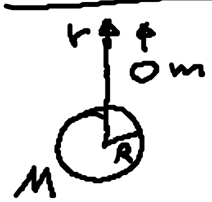
$$\dot{x} = -gt + v_0 \quad (4.7)$$

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \quad (4.8)$$

- Steighöhe h von $x_0 = 0$: Umkehrpkt: $\dot{x} = 0 \xrightarrow{(4.7)} t = \frac{v_0}{g}$

$$\xrightarrow[(4.8)]{} \boxed{h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}} \quad (4.9)$$

b) Senkrechter Wurf im Gravitationspotential



$$m\ddot{r} = -\gamma\frac{mM}{r^2} = -mg\frac{R^2}{r^2} \quad (4.10)$$

$$g = \gamma\frac{M}{R^2}$$

1. Integral: $\int (4.10)\cdot\dot r$ $\frac{m}{2}\dot r^2 \underbrace{- mg\frac{R^2}{r}}_{U(r)} = E \quad (4.11)$

2. Integral: $(t_0=0)$

$\dot r = \frac{dr}{dt}$ $$t = \int_R^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + mg\frac{R^2}{r}\right)}} \quad (4.12)$$

(von Erde bei $t=0$)

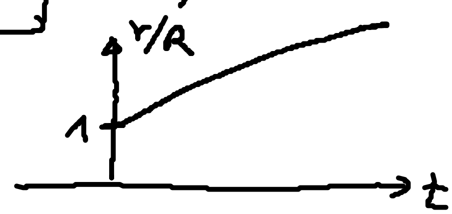
- parabolische / 2. kosmische Fluchtgeschwindigkeit v_0: $\boxed{v(r\to\infty) = 0 \underset{(4.11)}{\hat{=}} E = 0}$

aus EES (4.11) mit $r = R$ $\boxed{v_0 = \dot r(0) \underset{E=0}{=} \sqrt{2gR}}$ (4.13) $= 11{,}2\,\frac{km}{s}$

Erde: $R \approx 6378$ km

aus (4.12) $t \underset{E=0}{\overset{(4.13)}{=}} \int_R^{r(t)} \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{r}{R}}\,dr = \frac{2}{3}\frac{1}{v_0\sqrt{R}} r^{3/2}\Big|_R^{r(t)} = \frac{2}{3}\frac{1}{v_0\sqrt{R}} \times \left[r^{3/2}(t) - R^{3/2}\right]$

$$\longrightarrow \boxed{r(t) = R\left[1 + \frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t\right]^{2/3}} \quad (4.14)$$



mit $\dot r(t) = \frac{v_0}{\left[1 + \frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t\right]^{1/3}}$

$\longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow \infty$

- a) aus b): $\frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t \ll 1$: Taylorentw. von (4.14) mit (4.13)

$$\boxed{r(t) = \underbrace{R + v_0 t - \frac{g}{2}t^2}_{(4.8)} + \underbrace{\frac{1}{6}\frac{v_0^3}{R^2}t^3}_{\text{Korrektur}} + \dots} \quad (4.15)$$

4.3 Bewegung im geschw. abh. Kraftfeld

· Löse: $m\ddot{x} = F(\dot{x}) \xrightarrow[\dot{x}=v]{} m\dot{v} = F(v)$ ... Dgl. 1. Ordnung $v(t)$

– Trennung der Variablen: $\dot{v} = \frac{dv}{dt} \longrightarrow t = m \int_{v_0 = v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{F(v)} \longrightarrow v(t)$

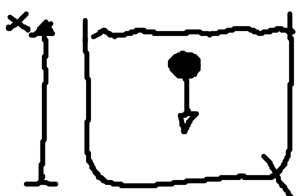
– 2. Integral: $x(t) = \int_0^t dt' \, v(t') + x_0$ (4.16)

x_0, v_0 ... Integrationsvariablen

· in der Regel: $t \to \infty$ schleichende Bewegung: $m\dot{v} = K(v) = 0$

$\longrightarrow v_\infty$ ... Grenzgeschw.

a) Freier Fall mit Stokesscher Reibung



η ... Viskosität

· $m\dot{v} = -mg - \beta v$ (4.17) $\beta = 6\pi\eta a$ ... Kugel

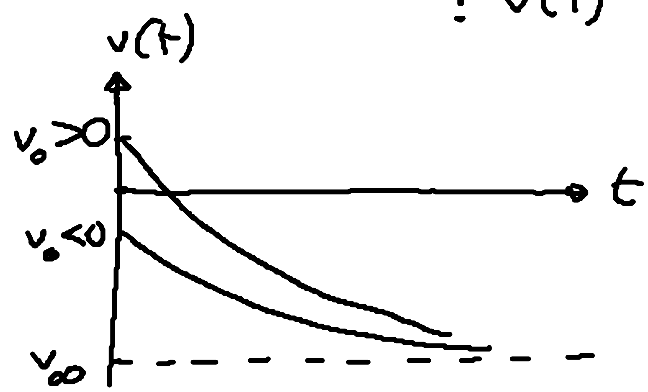
· $F(v) = 0 \longrightarrow \boxed{v_\infty = -\frac{mg}{\beta}} < 0$ (4.18)

· $t = -m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{mg + \beta v} \underset{(4.18)}{=} -\frac{m}{\beta} \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{\underbrace{\frac{mg}{\beta}}_{-v_\infty} + v} = -\frac{m}{\beta} \ln \frac{-v_\infty + v(t)}{-v_\infty + v_0}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty)\, e^{-t/\tau} \\ \tau = \frac{m}{\beta} \quad \text{... Relaxationszeit} \end{array}} \quad (4.19)$$

! $v(t) \longrightarrow v_\infty$, $t \to \infty$

$1\,P = 1 \frac{g}{cm\,s}$



Bsp: $\eta(H_2O) = 10^{-3} \frac{kg}{m\,s}$ $(= 0{,}01\,P)$

$a = 10^{-6}\,m$

$\rho = 1 \frac{g}{cm^3} = 10^3 \frac{kg}{m^3}$

$m = \rho \frac{4\pi}{3} a^3 \approx 4 \cdot 10^{-15}\,kg$

$\longrightarrow \tau = \frac{m}{6\pi\eta a} \approx 10^{-9}\,s\,!$

· Anwendung: mikroskop. Modell für Ohmsches Gesetz

$-mg \longrightarrow eE$ ... angel. Feld „beschl." $e^- \xrightarrow[(4.18)]{} \boxed{v_\infty = \frac{eE}{\beta}}$ (4.20)

elektr. Stromdichte: $j = n e v_\infty =: \sigma E$ ... Ohmsches Gesetz

n ... Dichte der Ladungsträger

$\xrightarrow[(4.20)]{} \boxed{\sigma = \frac{ne^2}{\beta} \underset{(4.19)}{=} \frac{ne^2\tau}{m}}$ (4.21) ... spezifische Leitfähigkeit

Mechanismus für Reibung

$\tau = \frac{m}{\beta}$! ... Reibung β durch Stöße von $\bar{e}$ mit Phononen (Gitterschwingungen) & Verunreinigungen im Metall

$\longrightarrow$ τ ... mittlere stoßfreie Zeit

b) Freier Fall mit Newtonscher Reibung (Luftwiderstand)

· Löse: $m\dot{v} = -mg + \gamma v^2 \longrightarrow$ Übungen

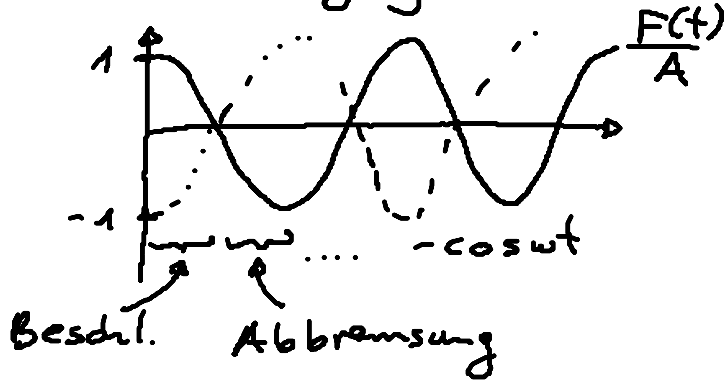
4.4. Reine zeitabh. Kraft

· Löse: $m\ddot{x} = F(t) \xrightarrow{1.\,\text{Integral}} \dot{x}(t) - v_0 = \underbrace{\frac{1}{m}\int_0^t F(t')\,dt'}_{\text{Kraftstoß}}$ (4.22)

$$\xrightarrow{2.\,\text{Integral}} x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m}\int^t dt' \int^{t'} dt''\, F(t'') \quad (4.23)$$

· Bsp: $F(t) = A\cos\omega t$

$$\xrightarrow[\text{o.B.}]{} \quad x = \underbrace{x_0 + v_0 t}_{\substack{\text{gleichf.}\\ \text{Bewegung}}} + \frac{A}{m\omega^2}(1 - \underbrace{\cos\omega t}_{\substack{\text{in Gegenphase}\\ \text{zur erregenden Kraft}}})$$



5. Eindimensionaler harmonischer Oszillator

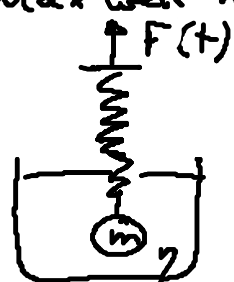
· volles Problem:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ges}(x,\dot{x},t) \\ \text{mit } F_{ges}(x,\dot{x},t) &= \underbrace{-fx}_{\substack{\text{harm./}\\ \text{Feder-}\\ \text{kraft}}} \underbrace{-\alpha\dot{x}}_{\substack{\text{Stokes}\\ \text{sche}\\ \text{Reibung}}} + \underbrace{F(t)}_{\substack{\text{einge-}\\ \text{prägte}\\ \text{Kraft}}} \end{aligned}} \tag{5.1}$$

· Realisierung

mechanisch

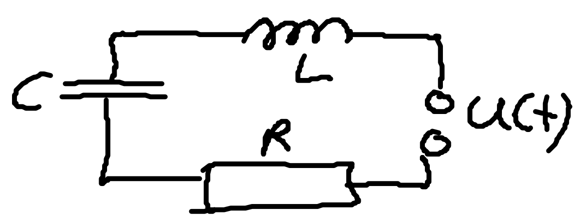
Maxwell-Körper



viskose Flüssigkeit

elektromagnetisch

Schwingkreis



$$\underbrace{L\ddot{Q}}_{\text{„Masse"}} + \underbrace{R\dot{Q}}_{\text{„Reibg"}} + \underbrace{\frac{1}{C}Q}_{\text{„Feder"}} = U(t) \qquad \dot{Q} = I(t)$$

- harm. Oszillator: – fundamentale Bedeutung in der Physik
  – eines der wenigen exakt lösbaren Probleme
- dient zur: Veranschaulichung von fundamentalen Konzepten
- <u>mathem. Details</u>:

(5.1): lineare Dgl. 2. Ordnung in $\overbrace{\text{Zeit}}^{\text{für } x(t)}$ mit Inhomogenität [F(t)]

$\hookrightarrow$ Superpositionsprinzip

$\hookrightarrow$ 2 Integrationskonst.

$\rightarrow x_{part}(t)$

allg. Lsg:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{a\, x_1(t) + b\, x_2(t)}_{x_{hom}(t)} + \underbrace{x_{part}(t)}_{\text{\underline{eine} partikuläre Lsg}}} \quad (5.2)$$

$x_{hom}(t)$: Lsg. der homog. Dgl.

wobei $x_1(t), x_2(t)$ linear unabh. sind