- $O(x^n) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots$

5.3. Harmonischer Oszillator mit eingeprägter Kraft (erzwungene Schwingung)

- Grundgl.: $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t)$ (5.26)

allg. Lsg: $x(t) = \underbrace{x_{hom}(t)}_{\text{bekannt}} + \underbrace{x_{part}(t)}_{\text{unbekannt}}$ (5.27)

a) harmonische Kraft: $F(t) = F_\omega \cos\omega t$

- Übergang ins Komplexe: $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_\omega}{m} e^{i\omega t} \quad (5.28)$$

$\operatorname{Re} e^{i\omega t} = \cos\omega t$

- Erfahrung: nach Einschwingen folgt der Oszillator der Kraft

$\longrightarrow$ Ansatz: $z_{part}(t) = A_\omega e^{i\omega t}$ (5.29)

$\xrightarrow{\text{in (5.28)}}$: $(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) A_\omega \cancel{e^{i\omega t}} = \frac{F_\omega}{m} \cancel{e^{i\omega t}}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} A_\omega &= \chi(\omega)\frac{F_\omega}{m} \\ \text{mit } \chi(\omega) &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \end{aligned}} \quad (5.30)$$

... dynamische Suszeptibilität

(i) $\chi(\omega) = f(\omega, \underbrace{\omega_0, \gamma}_{\text{„Kenngrößen"}})$

(ii) vermittelt Antwort A_ω auf äußeres Feld/Störung/Kraft

(iii) $\chi(0)$ ... statische Suszeptibilität

(iv) andere Bsp: Magnetisierung $\underline{M} = \chi_m \underline{H}$

Polarisation $\underline{P} = \chi_e \underline{E}$

· Umschreibung: Erinnerung: $\frac{1}{a+ib}\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, e^{i\delta}, \quad \tan\delta = \frac{-b}{a}$ (5.31)

$$\boxed{\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\,\chi''(\omega) = |\chi(\omega)|\, e^{-i\delta(\omega)}} \quad (5.32)$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} &\chi'(\omega) = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} \qquad \chi''(\omega) = \frac{-2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} < 0 \\ &|\chi(\omega)| = \sqrt{\chi(\omega)\,\chi^*(\omega)} = \frac{1}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} \qquad \tan\delta(\omega) = -\frac{\chi''}{\chi'} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\end{aligned}}$$

$z = x + iy$

$z^* = x - iy$

· reelle Lsg: $(\gamma < \omega_0)$

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t) = \operatorname{Re}\Big[\underbrace{z_{hom}(t)}_{(5.20)} + \underbrace{|\chi(\omega)|\frac{F_\omega}{m}\, e^{i(\omega t - \delta(\omega))}}_{z_{part}(t) \leftarrow (5.29) \text{ mit } (5.30)/(5.32)}\Big] \quad (5.33)$$

$$\longrightarrow \boxed{x(t) = \underbrace{B\, e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t - \varphi)}_{x_{hom}(t)} + \underbrace{|\chi(\omega)|\frac{F_\omega}{m}\cos[\omega t - \delta(\omega)]}_{x_{part}(t)}} \quad (5.33)$$

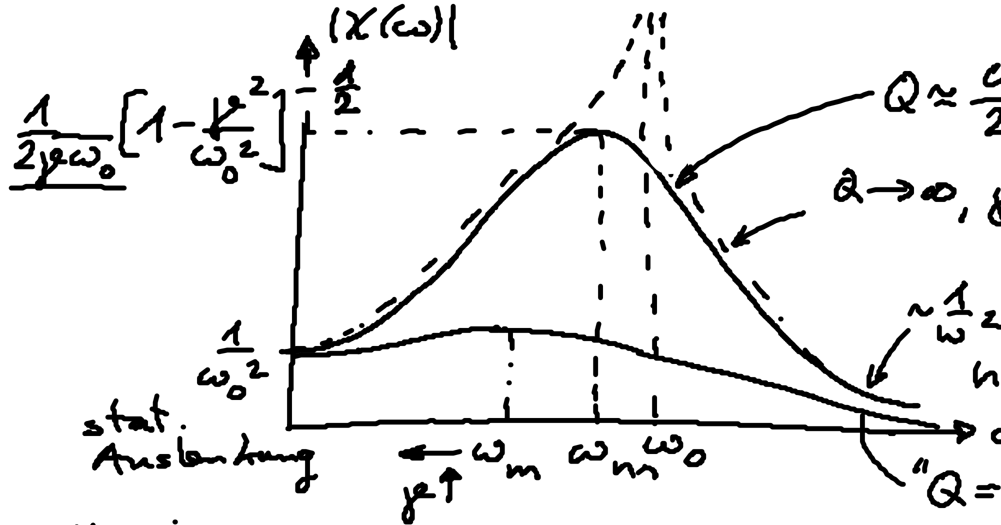
Einschwingvorgang $\longrightarrow 0,\ t \gg \tau = \gamma^{-1}$

eingeschwungener Zustand „Resonanzanregung"

· transientes Verhalten: $x_{hom}(t)$ & $x_{part}(t)$

$\hat{=}$ Überlagerung zweier Schwingungen:
i.a. $\omega_d \neq \omega$

· **Diskussion von $\chi(\omega)$:**



$Q \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0 \tau}{2}$ groß

$Q \to \infty$, $\gamma = 0$ … Resonanzkatastrophe bei ω_0 (ständige Energiezufuhr ohne Dissipation)

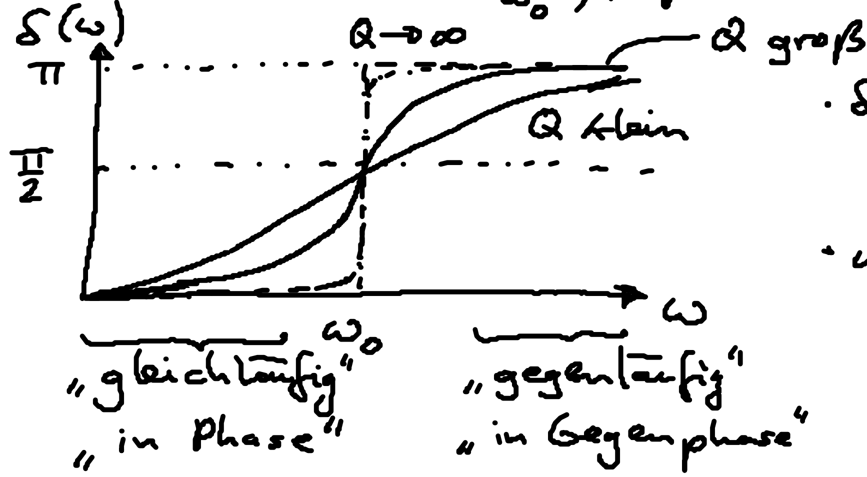
$\sim \frac{1}{\omega^2}$ ... wann Oszillator kann Kraft nicht mehr folgen

"$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$" klein

Maximum:

$$\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0 \quad , \quad \gamma < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \qquad (5.34)$$

$$\left[(1-x)^{1/2} \approx 1 - \tfrac{1}{2}x\right] \approx \omega_0\left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right), \quad \gamma \to 0 \qquad (5.35)$$



· $\delta(\omega) > 0$ … Oszillator hinkt der Kraft hinterher

· $\omega \gg \omega_0$ … Oszillator in Gegenphase zur Kraft
$\longrightarrow$ keine Energieaufnahme
$\hat{=}\ \chi(\omega) \sim \frac{1}{\omega^2}$

· **Näherung:** $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$

(5.30)

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \underbrace{(\omega_0 + \omega)}_{\approx 2\omega_0}\underbrace{(\omega_0 - \omega)}_{-\Delta\omega}$$

$$\longrightarrow \chi(\Delta\omega) \approx -\frac{1}{2\omega_0(\Delta\omega - i\gamma)}$$

$$\longrightarrow |\chi(\omega)| \approx \frac{1}{2\omega_0\gamma\sqrt{1+\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)^2}}$$

… Maximum (Peak)
Breite $\sim \gamma$
Höhe: $\frac{1}{\gamma}$ (5.36)

$$\longrightarrow \tan\delta(\omega) \approx \frac{\gamma}{\Delta\omega}$$

… Übergangsbreite:
Breite: γ

• **Leistungsbilanz**

$$(2.25)\quad \frac{d}{dt}\underbrace{\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{m}{2}\omega_0^2x^2\right]}_{\text{mechan. Energie } E_{mech}} = F_{diss}\,\dot{x} = \underbrace{-\alpha\dot{x}^2}_{\substack{\text{Reibungs-}\\ \text{verlust-}\\ \text{Leistung}}} + \underbrace{F(t)\,\dot{x}}_{\substack{\text{Leistung der}\\ \text{äußeren Kraft}}} \qquad (5.37)$$

• **eingeschwungener Zustand**: $x(t) = x_{part}(t)$

$$\frac{d}{dt}\langle E_{mech}\rangle = 0 \longrightarrow \alpha\langle\dot{x}^2\rangle = \langle F(t)\,\dot{x}\rangle$$

„Dissipation" „Absorption"

$$\langle\ldots\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\ldots\,dt$$

gemittelte, dissipierte Energie pro Zeit:

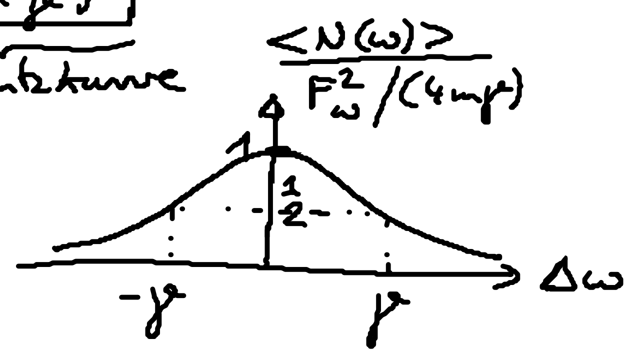
$$\langle N(\omega)\rangle = \underbrace{\alpha}_{2\gamma m}\langle\dot{x}^2\rangle \underset{(5.33)}{=} 2\gamma m\,\underbrace{|\chi(\omega)|^2}_{\substack{-\chi''(\omega)/(2\gamma\omega)\\ \text{[s. (5.33)]}}}\frac{F_\omega^2}{m^2}\,\omega^2\,\underbrace{\langle\sin^2(\omega t-\delta(\omega))\rangle}_{\frac{1}{2}\,!}$$

$$\boxed{\langle N(\omega)\rangle = -\frac{\omega}{2m}F_\omega^2\,\chi''(\omega)} \qquad (5.38)$$

… absorbierte = dissipierte Leistung ist bestimmt durch $\chi''(\omega)$!!!

• Näherung: $\Delta\omega \ll \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$: $\chi''(\Delta\omega) \underset{(5.36)}{=} -\frac{1}{2\omega_0}\frac{\gamma}{(\Delta\omega)^2+\gamma^2}$

$$\xrightarrow[\omega\approx\omega_0]{(5.38)} \boxed{\langle N(\omega)\rangle \approx \frac{F_\omega^2}{4m\gamma}\underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)^2}}_{\text{Lorentzkurve}}} \qquad (5.39)$$



b) Der Formalismus der linearen Antwort I
(Methode der Greenschen Fkt.)

- dynamischen Eigenschaften eines Systems?

  äußerer Stimulus/anregende Kraft $\longrightarrow$ Reaktion/Antwort

  Bsp: $A_\omega = \chi(\omega)\frac{F_\omega}{m}$ ... „lineare"

- Ziel: „allgemeinste lineare Antwort"

- Bsp: harm. Oszillator: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \hat{F}(t) = \frac{F(t)}{m}$ (5.40)

  beliebige Kraft $\hat{F}(t) \xrightarrow[\text{Antwort}]{\text{„allg. lineare}} x_{part}(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')\,\hat{F}(t')\,dt'$ (5.41)