- $O(x^n) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots$

## 5.3. Harmonischer Oszillator mit eingeprägter Kraft (erzwungene Schwingung)

- Grundgl.: $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t)$ (5.26)

allg. Lsg: $x(t) = \underbrace{x_{hom}(t)}_{\text{bekannt}} + \underbrace{x_{part}(t)}_{\text{unbekannt}}$ (5.27)

a) **harmonische Kraft**: $F(t) = F_\omega \cos\omega t$

- Übergang ins Komplexe: $x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_\omega}{m} e^{i\omega t} \quad (5.28)$$

$\mathrm{Re}\, e^{i\omega t} = \cos\omega t$

- Erfahrung: nach Einschwingen folgt der Oszillator der Kraft

$\longrightarrow$ Ansatz: $z_{part}(t) = A_\omega e^{i\omega t}$ (5.29)

$\overrightarrow{\text{in (5.28)}}$: $(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) A_\omega \cancel{e^{i\omega t}} = \frac{F_\omega}{m} \cancel{e^{i\omega t}}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} A_\omega &= \chi(\omega)\frac{F_\omega}{m} \\ \text{mit } \chi(\omega) &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \end{aligned}} \quad (5.30)$$

... <u>dynamische Suszeptibilität</u>

(i) $\chi(\omega) = f(\omega, \underbrace{\omega_0, \gamma}_{\text{„Kenngrößen"}})$

(ii) vermittelt Antwort $A_\omega$ auf äußeres Feld / Störung / Kraft

(iii) $\chi(0)$ ... statische Suszeptibilität

(iv) andere Bsp: Magnetisierung $\underline{M} = \chi_m \underline{H}$

Polarisation $\underline{P} = \chi_e \underline{E}$

· Umschreibung: Erinnerung: $\frac{1}{a+ib}\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{i\delta}$, $\tan\delta = \frac{-b}{a}$ (S.31)

$$\boxed{\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) = |\chi(\omega)| e^{-i\delta(\omega)}} \quad (S.32)$$

mit
$$\chi'(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \qquad \chi''(\omega) = \frac{-2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} < 0$$

$$|\chi(\omega)| = \sqrt{\chi(\omega)\,\chi^*(\omega)} = \frac{1}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} \qquad \tan\delta(\omega) = -\frac{\chi''}{\chi'} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$z = x + iy$

$z^* = x - iy$

· <u>reelle Lsg</u>: $(\gamma < \omega_0)$

$$x(t) = \mathrm{Re}\, z(t) = \mathrm{Re}\Big[\underbrace{z_{hom}(t)}_{(S.20)} + \underbrace{|\chi(\omega)|\frac{F_\omega}{m} e^{i(\omega t - \delta(\omega))}}_{z_{part}(t) \leftarrow (S.27) \text{ mit } (S.30)/(S.32)}\Big] \quad (S.33)$$

$$\longrightarrow \boxed{x(t) = \underbrace{B e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t - \varphi)}_{x_{hom}(t)} + \underbrace{|\chi(\omega)|\frac{F_\omega}{m}\cos[\omega t - \delta(\omega)]}_{x_{part}(t)}} \quad (S.33)$$

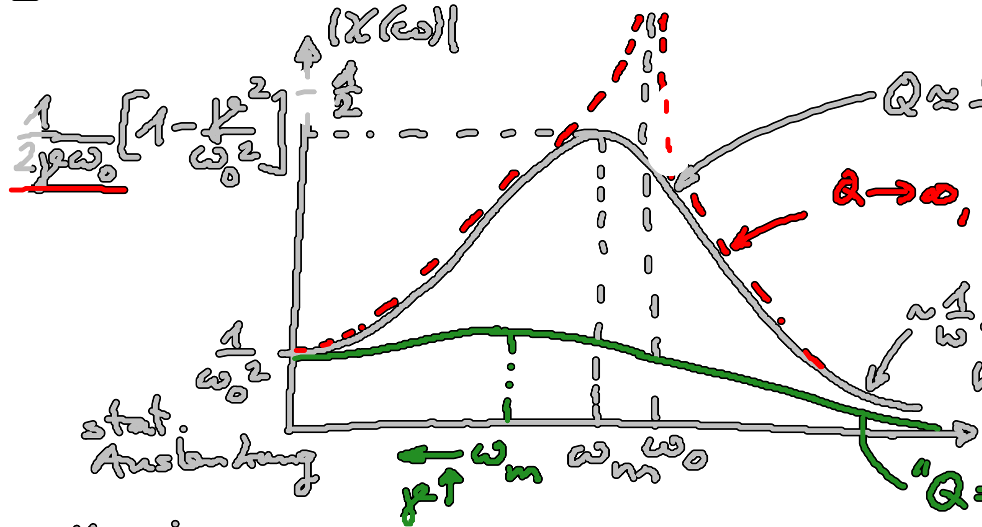
Einschwingvorgang $\longrightarrow 0$, $t \gg \tau = \gamma^{-1}$

eingeschwungener Zustand „Resonanzanregung"

· <u>transientes Verhalten</u>: $x_{hom}(t)$ & $x_{part}(t)$

≙ Überlagerung zweier Schwingungen:
i.a. $\omega_d \neq \omega$

• Diskussion von $X(\omega)$:




$Q \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0 \tau}{2}$ groß

$Q \to \infty$, $\gamma = 0$ ... Resonanzkatastrophe bei $\omega_0$
(ständige Energiezufuhr ohne Dissipation)

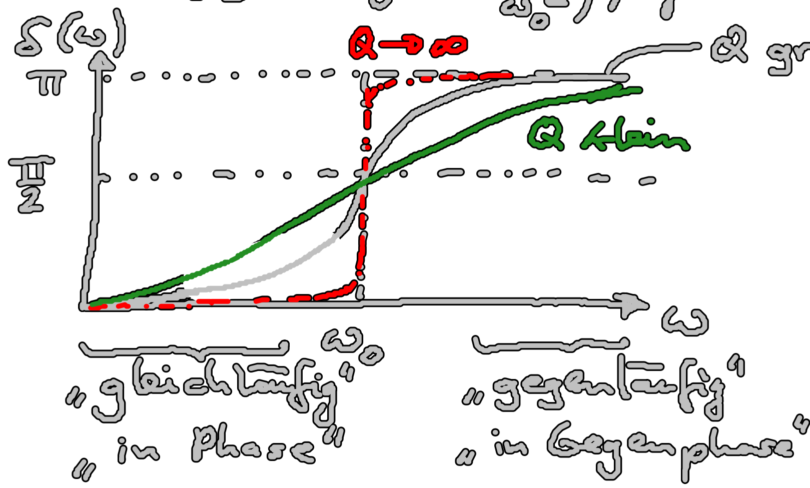
$\sim \frac{1}{\omega^2}$
wann Oszillator kann Kraft nicht mehr folgen

"$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$" klein

Maximum:

$$\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0 \ , \quad \gamma < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \quad (5.34)$$

$$\left[(1-x)^{1/2} \approx 1 - \tfrac{1}{2}x\right] \approx \omega_0\left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right), \quad \gamma \to 0 \quad (5.35)$$




• $\delta(\omega) > 0$ ... Oszillator hinkt der Kraft hinterher

• $\omega \gg \omega_0$ ... Oszillator in Gegenphase zur Kraft
$\longrightarrow$ keine Energieaufnahme
$\hat{=}\ X(\omega) \sim \frac{1}{\omega^2}$

• Näherung: $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$

(5.30)

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \underbrace{(\omega_0 + \omega)}_{\approx 2\omega_0}\underbrace{(\omega_0 - \omega)}_{-\Delta\omega}$$

$$\longrightarrow X(\Delta\omega) \approx -\frac{1}{2\omega_0(\Delta\omega - i\gamma)}$$

$$\longrightarrow |X(\omega)| \approx \frac{1}{2\omega_0\gamma\sqrt{1+\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)^2}}$$

... Maximum (Peak)
Breite $\sim \gamma$
Höhe: $\frac{1}{\gamma}$ (5.36)

$$\longrightarrow \tan\delta(\omega) \approx \frac{\gamma}{\Delta\omega}$$

... Übergangsbreite:
Breite: $\gamma$

- **Leistungsbilanz**

$$(2.25)\quad \frac{d}{dt}\underbrace{\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{m}{2}\omega_0^2x^2\right]}_{\text{mech. Energie } E_{mech}} = F_{diss}\,\dot{x} = \underbrace{-\alpha\dot{x}^2}_{\text{Reibungsverlust-Leistung}} + \underbrace{F(t)\,\dot{x}}_{\text{Leistung der äußeren Kraft}} \qquad (5.37)$$

- **eingeschwungener Zustand**: $x(t) = x_{part}(t)$

$$\frac{d}{dt}\langle E_{mech}\rangle = 0 \longrightarrow \underbrace{\alpha\langle\dot{x}^2\rangle}_{\text{„Dissipation"}} = \underbrace{\langle F(t)\,\dot{x}\rangle}_{\text{„Absorption"}}$$

$$\langle\ldots\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\ldots\,dt$$

gemittelte, dissipierte Energie pro Zeit:

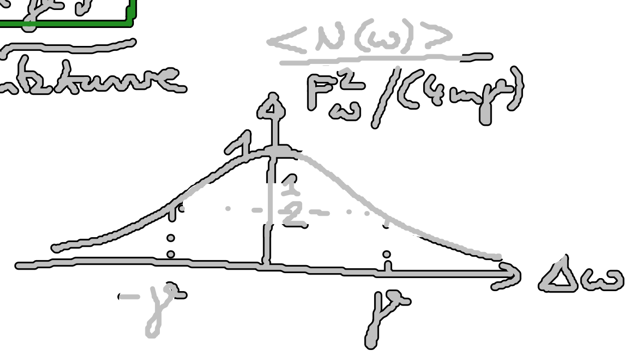
$$\langle N(\omega)\rangle = \underbrace{\alpha}_{2\gamma m}\langle\dot{x}^2\rangle \underset{(5.33)}{=} 2\gamma m\,\underbrace{|\chi(\omega)|^2}_{\substack{-\chi''(\omega)/(2\gamma\omega)\\ \text{[s. (5.33)]}}}\frac{F_\omega^2}{m^2}\,\omega^2\,\underbrace{\langle\sin^2(\omega t-\delta(\omega))\rangle}_{\frac{1}{2}\,!}$$

$$\boxed{\langle N(\omega)\rangle = -\frac{\omega}{2m}F_\omega^2\,\chi''(\omega)} \qquad (5.38)$$

... absorbierte = dissipierte Leistung ist bestimmt durch $\chi''(\omega)$!!!

- **Näherung**: $\Delta\omega \ll \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$: $\chi''(\Delta\omega) \underset{(5.36)}{=} -\frac{1}{2\omega_0}\frac{\gamma}{(\Delta\omega)^2+\gamma^2}$

$$\xrightarrow[\omega\approx\omega_0]{(5.38)}\quad \boxed{\langle N(\omega)\rangle \approx \frac{F_\omega^2}{4m\gamma}\underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)^2}}_{\text{Lorentzkurve}}} \qquad (5.39)$$



## b) Der Formalismus der linearen Antwort I

(Methode der Greenschen Fkt.)

- dynamischen Eigenschaften eines Systems?

  äußerer Stimulus/anregende Kraft $\longrightarrow$ Reaktion/Antwort

  Bsp: $A_\omega = \chi(\omega) \dfrac{F_\omega}{m}$ … „lineare“

- Ziel: „allgemeinste lineare Antwort

- Bsp: harm. Oszillator: $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \hat{F}(t) = \dfrac{F(t)}{m}$ (5.40)

  beliebige Kraft $\hat{F}(t) \xrightarrow[\text{Antwort}]{\text{„allg. lineare}} x_{part}(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')\, \hat{F}(t')\, dt'$ (5.41)