· Interessenten für Skript-Erstellung:
Treffen: Fr. 16.11.07, 11^{45} s.t. EW731

d) Der Formalismus der linearen Antwort II

· Es galt: $\hat{L}(t)\,G_c(t-t') = \underbrace{\delta(t-t')}_{\delta\text{-Kraft}}$, $\hat{L}(t) = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2$ (5.61)

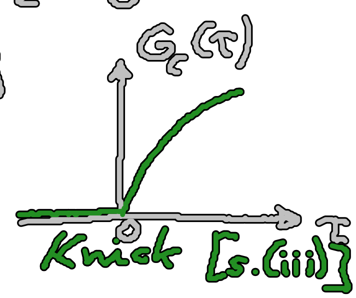
$\int \delta(t-t')\,dt' = 1$ ... δ-Kraftstoß

· Bestimmung der Greenschen Fkt. aus Stetigkeits- und Sprungbed.:

(i) Kausalität: $\boxed{G_c(\tau) = 0,\ \tau < 0}$ $\tau = t - t'$

(ii) Stetigkeit: $G_c(\varepsilon) - \underbrace{G_c(-\varepsilon)}_{=0\ [\text{s. (i)}]} = 0,\ \varepsilon \to 0$

$\longrightarrow \boxed{G_c(0) = 0}$

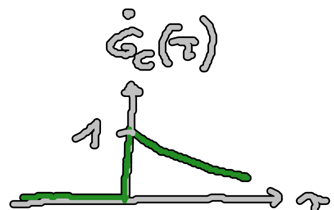


(iii) Sprungbed.:

(5.61): $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\tau \left[\underbrace{\ddot{G}_c(\tau)}_{} + \underbrace{2\gamma\,\dot{G}(\tau)}_{2\gamma[G_c(\varepsilon) - G_c(-\varepsilon)] \to 0,\ \varepsilon\to 0} + \underbrace{\omega_0^2\,G_c(\tau)}_{\to 0,\ \varepsilon \to 0} - \underbrace{\delta(\tau)}_{1}\right] = 0$

$\longrightarrow \dot{G}_c(\varepsilon) - \underbrace{\dot{G}_c(-\varepsilon)}_{=0\ [\text{s. (i)}]} = 1$

$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \boxed{\dot{G}_c(+0) = 1}$



$\longrightarrow$

vgl: δ-Kraftstoß: $1 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\frac{F}{m}}_{\delta(\tau)} d\tau \underset{(2.1)}{=} \frac{1}{m}[p(\varepsilon) - \underbrace{p(-\varepsilon)}_{0}]$

$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \boxed{1 = v(0) = \dot{x}(0)}$

(iv) $\tau > 0$: $G_c(\tau)$ löst homog. Dgl.

(i)–(iv): kausale Greensche Fkt. (5.62)

$$\boxed{G_c(t-t') = \underbrace{\Theta(t-t')}_{(i)} \underbrace{\frac{1}{\omega_d}}_{(iii)} \underbrace{e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_d(t-t')]}_{(ii),\,(iv):\ (5.20) \text{ mit } \varphi = \frac{\pi}{2}}}$$

· <u>Bemerkungen</u>

(i) δ-Kraft: $\delta(t-t') \underset{(5.52)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{i\omega(t-t')}}_{\substack{\xrightarrow{\text{Antwort}} \\ \chi(\omega)\frac{1}{2\pi} e^{i\omega(t-t')}\ (*)}} d\omega$ ... kont. Überlagerung von harm. Kräften der Stärke $\frac{1}{2\pi}$

vgl. (5.30)

Linearität der DGl.: Antwort auf $\delta(t-t')$ $\xrightarrow{\text{Überlagere } (*)}$ (5.63)

$$\boxed{G_c(t-t') = \int \chi(\omega) e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi} \equiv K(t-t')}$$

... Fourier-Integral-Darstellung von $G_c(t-t')$

dynam. Suszeptibilität $\chi(\omega) \equiv$ Fourier-Transformierte von $G_c(t-t')$

$$\boxed{G_c(\omega) = \chi(\omega)} \quad (5.64)$$

NB: Berechne (5.63) durch Integration im Komplexen

[Einschub: Fouriertransf. (FT)

vgl. Vektoren: $\underline{a} = \sum_i a_i \underline{e}_i$ mit $a_i = \underline{e}_i \cdot \underline{a}$, $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$

hier: Basis für $f(t)$?

definiere: Fouriertransf. von $f(t)$

$$\hat{f}(\omega) \equiv f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt \underbrace{\text{"} = \langle e^{i\omega t} | f(t) \rangle \text{"}}_{QM}$$

dann gilt: (o.B.)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Faltungssatz der FT:

$$f(\omega)\, g(\omega) \xrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')\, g(t')\, dt' \quad]$$

(ii) allgemeine Kraft:

$$\hat{L}(t)\, x(t) = \hat{F}(t)$$

$$x(t) = \int x(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \qquad \hat{F}(t) = \int \hat{F}(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\longrightarrow \int \chi^{-1}(\omega)\, x(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int \hat{F}(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

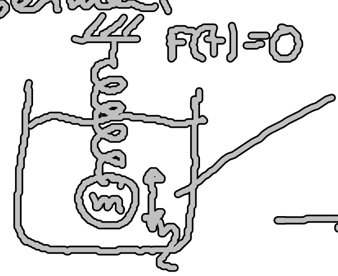
$$\boxed{\chi^{-1}(\omega)\, x(\omega) = \hat{F}(\omega)} \quad \text{vgl. (5.30)}$$

$$\longrightarrow x(\omega) = \chi(\omega)\, \hat{F}(\omega) \xrightarrow[\text{der FT}]{\text{Faltungssatz}}$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\chi(t-t')}_{G_c(t-t')}\, \hat{F}(t')\, dt'} \quad \text{vgl. (5.42)}$$

(iii) <u>Ausblick</u>: Fluktuations-Dissipations-Theorem

Experiment



Zitterbewegung der Kugel aufgrund therm. Stöße der Flüssigkeitsmol.

$\longrightarrow$ mittlere kinet. Energie: $\frac{m}{2}\langle v^2\rangle_E = \frac{k_BT}{2}$

" pot. " $\frac{m}{2}\omega_0^2\langle x^2\rangle_E = \frac{k_BT}{2}$

wobei $\langle\dots\rangle_E$ … Mittel über ein ganzes Ensemble von harm. Oszillatoren

charakt. Zitterbewegung durch:

$C(t) = \langle x(t)\,x(0)\rangle_E$ … „zeitl. Autokorrelationsfkt. der Auslenkung $x(t)$"

Führe ein: $C(\omega) = \int C(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$ (5.55)

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$ $\boxed{\underbrace{C(\omega)}_{\text{Fluktuationen}} = -\frac{2}{m}\frac{k_BT}{\omega}\underbrace{\chi''(\omega)}_{\text{Absorption/Dissipation}}}$ … Fluktuations-Dissipations-theoremen

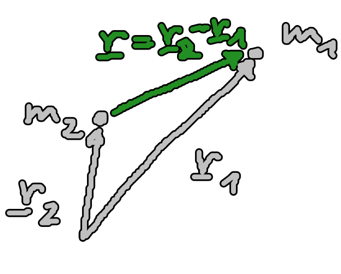
Fluktuationen $\longleftrightarrow$ Absorption/Dissipation

Licht-streu-exp. Resonanzexp.

6. Bewegung im Zentralfeld

6.1. Problemstellung

• Geometrie:



WW zwischen m_1 und m_2: Zentralpotential: $U(\underline{r}) = U(r)$ $(|\underline{r}| = r!)$ (6.1)

$\longrightarrow \underline{F}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\underline{\nabla}r = -\frac{\partial U}{\partial r}\underbrace{\underline{e}_r}$

$\underline{r}/|\underline{r}|$
„Zentralkraftfeld"
[vgl. Kap. 2.3]

- **Bsp:** (i) Keplerproblem: $U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$
  $m_1 = m_{P(lanet)}$
  $m_2 = m_{S(onne)}$

  (ii) Streuung: Komet an Erde "

  } Gravitations-potential (3.3)

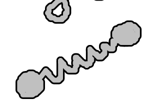
  (iii) Wasserstoffatom: $U(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$

  (iv) Rutherfordstreuung: $U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$

  } Coulombpotential (3.11)

  ↳ α-Teilchen [Kernladungszahl $Z_1 = 2$ ... Heliumkerne] getestet an Goldfolie [$Z_2 = 79$]
  ⟶ Nachweis: Atom = massiver Atomkern & e^--Wolke
  ⟶ Atomphysik

  (v) Oszillator: $U(r) = \frac{1}{2} f r^2$ ... Schwingungsenergie eines 2-atomiges Molekül



6.2. Reduktion zum Einteilchen-Problem

- Zweiteilchenproblem (⟶ Kap 2)

$$\left.\begin{aligned} (1)\quad m_1 \ddot{\underline{r}}_1 &= -\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \\ (2)\quad m_2 \ddot{\underline{r}}_2 &= -\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \end{aligned}\right\} (6.2)$$

- Entkoppeln?

„Schwerpkt. koordinate": $\underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$
[⟶ Kap. 2] (6.3)

Relativ koord. $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

$$\overset{\text{o.B.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \underline{r}_1 = \underline{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underline{r} \\ \underline{r}_2 = \underline{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{r} \end{cases} (6.4)$$

- <u>Schwerpkts. bewegung</u>

(1) + (2): l.S.: $\underbrace{(m_1+m_2)}_{M}\ddot{\underline{R}}$

r.S.: $-\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|) \underbrace{- \underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{-\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)} = 0$

$$\left.\right\} \quad M\ddot{\underline{R}} = 0 \quad (6.5) \quad \longrightarrow \quad \underline{R} = \underline{a}t + \underline{b}$$

$\longrightarrow$ kräftefreie Bewegung des Gesamtsystems mit Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$

- <u>Relativbewegung</u>

in (6.2): $\frac{1}{m_1}(1) - \frac{1}{m_2}(2) \longrightarrow \underbrace{\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2}_{\ddot{\underline{r}}} = -\frac{1}{m_1}\underbrace{\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{\underbrace{\underline{\nabla}_r}_{\underline{\nabla}} U(\underbrace{|\underline{r}|}_{r})} + \frac{1}{m_2}\underbrace{\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{-\underline{\nabla}_r(|\underline{r}|)}$

$$= -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\underline{\nabla} U(r)$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \mu\ddot{\underline{r}} &= -\underline{\nabla} U(r) \quad (6.6) \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \ \ldots \ \text{reduz. Masse} \quad (6.7) \end{aligned}}$$